

Una mirada a medio siglo de cimentaciones laminares, métodos de cálculo e investigaciones asociadas en Cuba

A look at half a century of shells foundations, methods of calculation and associate research in Cuba

Ángel Emilio Castañeda*¹, William Cobelo*, Yoermes González*, José Álvarez*

* Instituto Superior Politécnico “José Antonio Echeverría”, Ciudad de la Habana. CUBA

Fecha de recepción: 14/ 02/ 2011
Fecha de aceptación: 01/ 10/ 2011
PAG. 245 - 268

Resumen

El trabajo presenta un resumen de las cimentaciones laminares más significativas construidas en Cuba en los últimos decenios y los desarrollos asociados a estas en cuanto a métodos de cálculo de láminas y cascarones de geometría compleja mediante superficies y cuerpos de referencia, a partir de la generalización del método de las solicitaciones proyectadas (Pücher, 1934) con el empleo de superficies de referencia (Hernández, 1970) y otros desarrollos alcanzados en la mecánica del sólido deformable mediante el Método de la Dualidad (Rianitsyn, 1974; Castañeda, 1993) y la Analogía estático-geométrica en la mecánica del sólido deformable (Castañeda, 1985). Incluye además una síntesis de las investigaciones desarrolladas en los últimos años sobre el estado tenso-deformacional del suelo bajo cimentaciones laminares para chimeneas de 74,5 m en Centrales Azucareros (Cobelo, 2004), estudios comparativos realizados a estas con el empleo del MEF (González, 2010) y otros proyectos investigativos en ejecución actualmente (Álvarez, 2010).

Palabras Clave: Cimentaciones laminares, métodos de cálculo, coordenadas relativas, solicitaciones proyectadas, deformaciones proyectadas

Abstract

The work shows a summary of the most significant shells foundations built in Cuba in the last decades and the developments related to these in term of methods of calculation of plates and shells of complex geometry using reference surfaces and reference bodies, from the generalization of the projected solicitations method (Pücher, 1934) with the use of referential surfaces (Hernández, 1970) and other developments made in the mechanics of deformable solid by the Method of Duality (Rianitsyn, 1974; Castañeda, 1993) and the Static-Geometric Analogy in the mechanics of the deformable solid (Castañeda, 1985). It also includes a summary of the research developed in recent years on the stress-strain states of soil under and inside shell foundations for chimneys of 74.5 m in sugar industries (Cobelo, 2004), comparative studies made of these with the use of the FEM (González, 2010) and other research projects currently running (Álvarez, 2010).

Keywords: Shell foundations, methods of calculation, relative coordinates, projected strains, projected deformations

1. Introducción

La ingeniería estructural en Cuba durante la segunda mitad del siglo XX y primera década del XXI contiene experiencias y aportes al cálculo de las cáscaras que no pueden describirse sin observar tres hechos muy entrelazados entre sí: el proyecto y la construcción de cimentaciones laminares en edificios y depósitos elevados (la necesidad); el método de las Coordenadas Relativas que generalizó el método de las “solicitaciones proyectadas” en un plano cartesiano para el cálculo de láminas y cáscaras² a cualquier superficie o cuerpo de referencia (la solución);

1. Introduction

Structural engineering in Cuba during the second half of the XX century and first decade of the XXI contains experiences and contributions to the calculation of shells that can not be described without looking at three very intertwined facts: the design and construction of shell foundations in buildings and elevated tanks (need); Relative Coordinates method generalized the method of “projected solicitations” on a Cartesian plane for the calculation of plates and shells² to any surface or body of reference (the solution);

¹ Autor de correspondencia / Corresponding author:
E-mail: ecashevia@civil.cujae.edu.cu

² El término “cáscara” o “cascarón” se utiliza en el texto para referirse a estructuras laminares (shells) de espesores medianos y gruesos, dentro de la definición brindada por la IASS (Asociación Internacional de Estructuras Laminares) cuyo comportamiento estructural exige considerar los efectos de fuerzas cortantes y momentos flectores sobre su superficie media, e incluso la posible composición de materiales tipo “sándwich” o de múltiples capas en general que requieran un estudio de distribución de tensiones, solicitaciones o corrimientos en su espesor



y las investigaciones sobre el comportamiento tenso-deformacional de los suelos y su capacidad soportante bajo cimentaciones laminares de revolución en chimeneas cortas con diversos modelos numéricos, basados en el método de los Elementos Finitos (la investigación aplicada). El artículo muestra una síntesis de los resultados más significativos de estos hechos, revela nexos y refiere fuentes para su estudio y extensión.

2. Discusión y desarrollo

El trabajo se subdivide en tres aspectos esenciales de las estructuras laminares en Cuba dentro del período (1955-2010): el proyecto y la construcción de cimientos laminares en edificios (Ruiz, 1962) y depósitos elevados (Hernández et al., 1968); el surgimiento del método de las Coordenadas Relativas (Hernández, 1970) y su posterior desarrollo como generalización del método de "solicitaciones proyectadas" (Pücher, 1934), que marcó la singularidad en los métodos de cálculo de cáscaras; y las investigaciones asociadas al estado tenso-deformacional del suelo en el nivel de solera y su capacidad soportante en suelos friccionales ($C = 0$) bajo cimentaciones laminares de revolución para chimeneas cortas (74,5m de altura). En él se revela la identidad, diferencia, nexos, y dinámica de estos aspectos, a la que responden los logros, las insatisfacciones y las nuevas tareas investigativas que se acometen.

2. 1 Proyecto y construcción de cimientos laminares en Cuba

Las cimentaciones laminares en Cuba han cumplido más de cincuenta años. Los cimientos laminares, como solución estructural para edificios, depósitos elevados y chimeneas, enriquecen el patrimonio constructivo del país. Sin embargo, aún carecen de la generalización que sus ventajas económicas, constructivas y de diseño le conceden en condiciones donde predomina el diseño geotécnico por estabilidad, dada la corta duración de la carga ecológica dominante (vientos extremos) y la falta de antecedentes sísmicos significativos.

El uso de cimientos laminares impulsó los métodos de cálculo de láminas y cascarones de geometría compleja mediante superficies y cuerpos de referencia en una línea de generalización del método de Pücher, y estimuló las investigaciones sobre el comportamiento de los suelos bajo cimentaciones laminares con aplicaciones ingenieras.

and research on stress-strain behavior of soils and foundation capacity under revolution shell foundations in short for chimneys with different numerical models, based on the Finite Element Method (applied research). The paper shows a summary of the most significant results of these facts, reveals links and refers to sources for its study and extension.

2. Discussion and development

The work is divided into three essential aspects of shell structures in Cuba within the period (1955-2010): design and construction of shell foundations buildings (Ruiz, 1962) and elevated tanks (Hernández et al, 1968); the rise of relative coordinates method (Hernandez, 1970) and its subsequent development as a generalization of the method of "projected solicitations" (Pucher, 1934), which marked the singularity in the calculation methods of shell; and research associated with the stress-strain state of the soil at the hearth and its supportive capacity on frictional soils ($C = 0$) under revolution shell foundation for short chimneys (74.5 m). It reveals the identity, difference, links, and dynamics of these aspects, which respond achievements, dissatisfactions and new research tasks that are undertaken.

2. 1 Design and construction of shell foundations in Cuba

Shell foundations have met in Cuba over fifty years. Shell foundation, as a structural solution for buildings, chimneys and elevated tanks, enrich the constructive heritage of the country. However, they lack the generalization that their economic, construction and design conditions grant due to the predominance of geotechnical design for stability, given the short duration of the dominant environmental burden (extreme wind) and the lack of significant seismic history.

The use of shell foundation drove the methods of calculation sheets and shells of complex geometry using reference surfaces and bodies in a line of generalization of the method of Pucher, and stimulated research on the behavior of layered soils under foundations with engineering applications.

Así, en los años cincuenta del pasado siglo se proyectó y construyó en la Habana el primer cimiento laminar en forma de balsa poligonal (folded plate) con losa atirantada superior para sustentar un edificio de 24 pisos (94m de altura sobre el nivel de solera), capaz de soportar vientos huracanados con una presión lateral de 300 kg/m² sobre un suelo con una capacidad soportante no superior a 3 kg/cm², que ha vencido satisfactoriamente la prueba del tiempo. Este cimiento, con una superficie en planta de 2100 m² (77,2 x 27,2) y un módulo transversal plegado de 8m y 45cm de espesor (Figura 1), obra del Dr. Ing. Sixto Ruiz Alejo (1932), representó una nueva concepción de cimentación para la época, con una disminución de un 30% en el costo de su construcción frente a una solución de balsa nervada con vigas trapezoidales, a precios fijos de aquel momento, sin incluir el beneficio de las cisternas. (Ruiz, 1962).

Thus, in last century fifties it was designed and built in La Havana the first shell foundation as a polygonal shaped raft (folded plate) with braced upper slab to support a 24-storey building (94m high) capable of supporting winds with a lateral pressure of 300 kg/m² on a floor with a supportive capacity not exceeding 3 kg/cm², which has successfully overcome the test of time. This foundation, with a floor area of 2100 m² (77.2 x 27.2) and transverse bending modulus of 8m and 45cm thick (Figure 1), work of Dr. Ing Sixto Ruiz Alejo (1932), represented a new foundation for the epoch conception, with a 30% decrease in the cost of construction compared to a solution of raft ribbed trapezoidal beam at fixed prices at the time, not including the benefit of the tanks. (Ruiz, 1962)

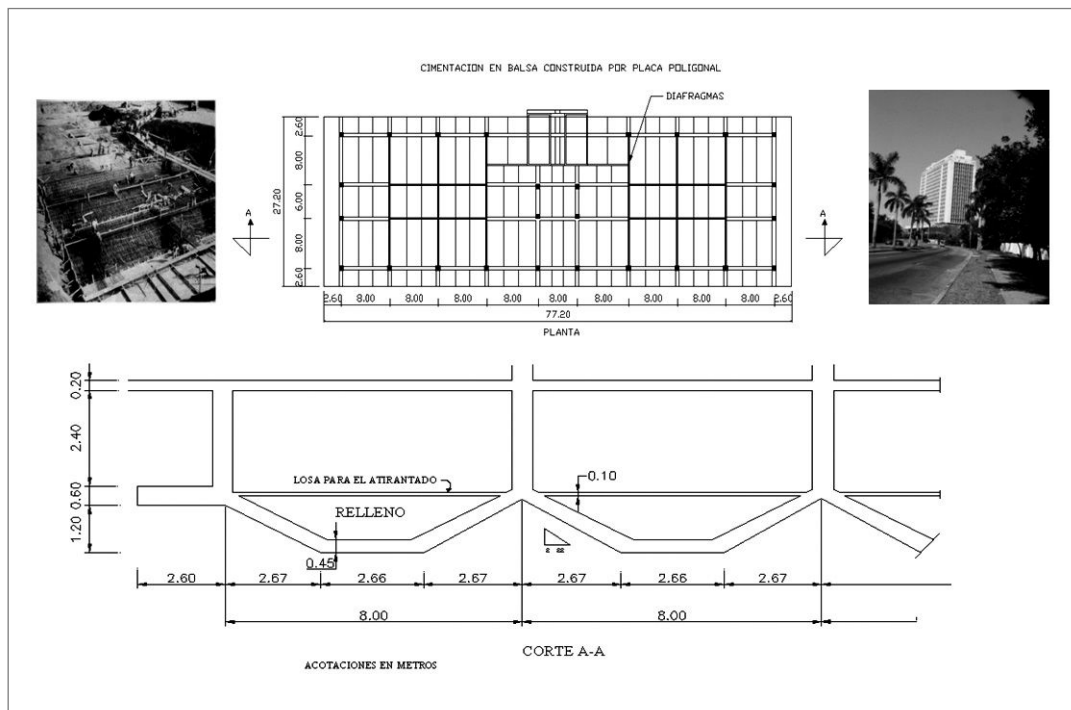


Figura 1. Cimentación laminar de placa poligonal (Folded Plate) para edificio alto en Ciudad de la Habana (Cortesía del Dr. Ing. Sixto Ruiz Alejo)

Figure 1. Laminar foundation of folded plate for a high building in Habana City (compliments by Eng. PhD. Sixto Ruiz Alejo)

Además, la limitada disponibilidad y el alto costo de la madera para la construcción de depósitos tipo INTZE en el país, impulsó una nueva tipología de depósitos elevados por la tecnología de moldes deslizantes, denominada tipo "Güines", en reconocimiento al primer depósito, proyectado y construido de forma totalmente laminar, en la localidad de Catalina de Güines, Provincia Habana en 1965 (Hernández et al., 1968).

Este depósito, de 280m³ de capacidad y 27m de altura, quedó conformado por una cimentación laminar tronco-cónica de hormigón armado con 10m de diámetro máximo y 2,20 de diámetro mínimo en el fuste, 30cm de espesor promedio y un ángulo de inclinación en la base de 30°. El cimiento fue hormigonado contra terreno natural, emparejado con una formaleta giratoria, y cerrado en sus bordes superior e inferior por un anillo cuadrado con 70cm de lado. Posee además, una pequeña placa circular de 60cm de espesor en la zona interior del fuste. El fuste es un cilindro de 2,50m de diámetro exterior y 27m de altura, construido mediante encofrado deslizante (Figura 2). El vaso y la tapa fueron hormigonados alrededor del fuste, antes del izaje. La nueva tipología exigió un sistema de encofrados metálicos de directrices cónicas para el hormigonado de los depósitos y sus tapas en torno al fuste, hasta su posterior izado.

In addition, the limited availability and high cost of timber deposit INTZE type in the country, promoted a new type of elevated tanks for slide mold technology, called type "Güines", in recognition to the first deposit, designed and build in a shell way, at Catalina de Güines, Habana Province in 1965 (Hernández et al, 1968).

This reservoir of 280m³ capacity and 27m high, was formed by a truncated cone shell foundation of reinforced concrete with a maximum diameter of 10mm minimum diameter and 2.20 in the shaft, 30cm average thickness and a basis angle of inclination of 30. The foundation was concrete against natural terrain, coupled with a rotating formwork, and closed at its top and bottom borders by a 70cm thick square ring. It also has a small circular plate 60 cm thick in the interior of the shaft. The shaft is a cylinder of 2.50 m outside diameter and 27m in height, constructed by sliding formwork (Figure 2). The cup and lid were concreted around the shaft before lifting. The new type required a system of metal formwork for concrete guidelines conical deposits and their covers around the shaft, until further lifting.

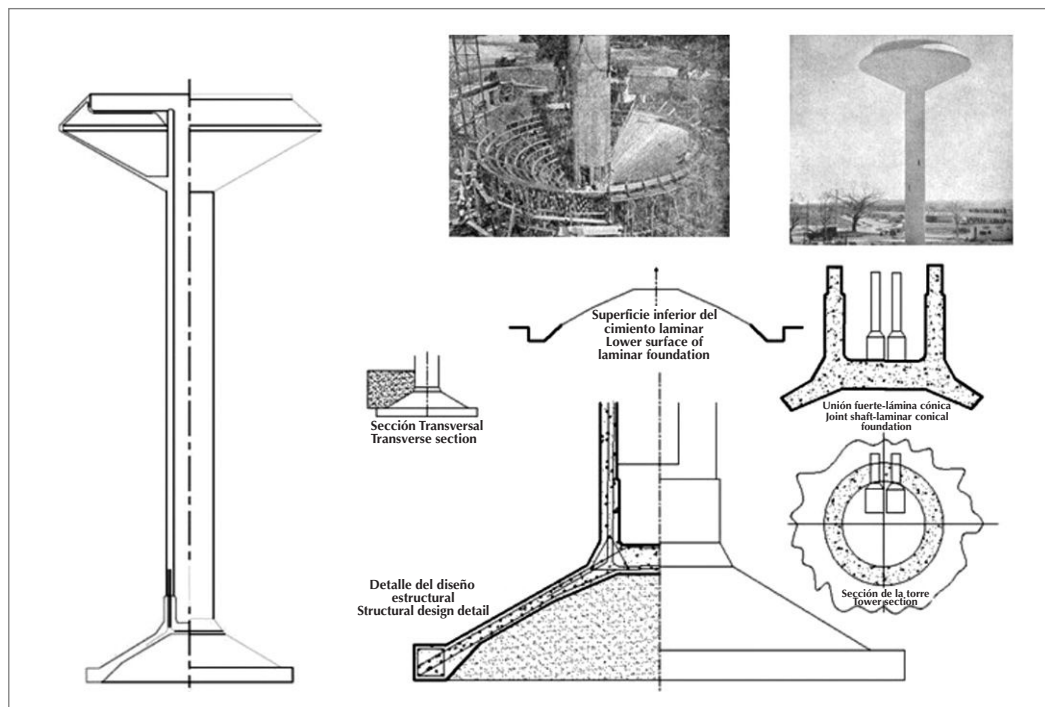


Figura 2. Primer depósito elevado tipo "Güira" con cimiento laminar tronco-cónico, construido eb Catalina de Güines, la Habana, 1965 (Hernández y Rubiera, 1968)

Figure 2. First elevated water tank, type "Guira" with laminar trunk-conical foundation, built in Catalina de Guíñez, La Habana, 1965 (Hernandez y Rubiera, 1968)

El desarrollo internacional de las estructuras tipo "torre" a partir de los años sesenta del siglo XX produjo un significativo impulso a las cimentaciones laminares en todo el mundo, y Cuba no fue una excepción. Hermann Rühle, Vicepresidente de la Asociación Internacional de Estructuras Laminares (IASS) señaló, en aquel momento, que: "La forma de cimentación más adecuada para estructuras de radio de esbeltez entre 0,1 y 0.05 es una cáscara cónica cerrada con un anillo exterior. En el caso de las chimeneas esta solución puede tener el inconveniente de requerir un diámetro considerable... En el caso de suelos y subsuelos pobres las cimentaciones circulares de estructuras tipo torre requieren anillos de gran diámetro. Sin embargo las cáscaras son la forma más adecuada de enlazar el fuste y el anillo exterior" (Rühle, 1967).

A finales de los años sesenta, y en correspondencia con esta idea, se proyectó por el Dr. Ing. José (Pimpo) Hernández (1936-2003), y se construyó por el Arquitecto José Licea Delgado (1930-1985) en Cuba, una cimentación laminar de revolución en forma de Campana de Gauss, siguiendo una propuesta de Havelka para cimentaciones tipo torre (Leonhardt, 1967), con 10,80m de diámetro máximo, 2,10m de profundidad, 20 cm de espesor y un fuste de la torre de elevación con 3,00m de diámetro (Figura 3) para un depósito elevado de 200 m³ de capacidad y 20m de altura en la ciudad de Matanzas, que ha soportado vientos extremos de 240 km/h, con rachas superiores a los 320 km/h, medidos en el lugar, sin afectaciones estructurales.

Las exigencias de esta cimentación, unido a los antecedentes del proyecto y construcción de un depósito en forma de "gota de agua" para la planta de tratamiento de la ciudad de Santiago de Cuba unos años antes (Figura 3), llevaron a Pimpo Hernández a desarrollar, en 1969, un novedoso método de cálculo de láminas que generalizó el método de "solicitaciones proyectadas" sobre un plano cartesiano (Pücher, 1934) por un método, denominado "Coordenadas relativas", dada su posibilidad de utilizar otras superficies de referencia y seleccionar la más adecuada al cálculo de cada lámina, incluida la posibilidad de que la ecuación de la lámina pueda sustituirse sólo por una función escalar de las líneas de curvatura de la superficie de referencia, en la dirección del vector normal a la misma (Hernández, 1970). El cálculo del cimiento laminar de revolución con directriz en forma de Campana de Gauss no hubiese podido lograrse, en aquel momento, sin un desarrollo de los métodos de cálculo como el que implicó esta generalización del Método de Pücher mediante Coordenadas Relativas, finalmente calculado sobre un plano polar conforme.

The international development of "tower" type structures from the sixties of XXth century on produced a significant impetus to the shells foundations worldwide, and Cuba was no exception. Hermann Rühle, Vice President of the International Association of Shells Structures (IASS) pointed out, at that time: "The foundation best suited for slender structures radius between 0.1 and 0.05 is a closed conical shell with an outer ring. For this solution chimneys can have the disadvantage of requiring a considerable diameter ... In the case of poor soils and subsoils foundations circular tower-like structures require large diameter rings. But the shells are the most appropriate way to link the shaft and the outer ring" (Rühle, 1967).

In the late sixties, and in accordance with this idea, Dr. Ing. José (Pimpo) Hernández (1936-2003) designed and Architect José Licea Delgado (1930-1985) build in Cuba a revolutionary shells foundation with the Gaussian shape, following Havelka's proposal for tower type foundations (Leonhardt, 1967), with a maximum diameter of 10.80 m, 2.10 m deep, 20 cm thick and a shaft of the lift tower with 3.00 m in diameter (Figure 3) for a high tank capacity of 200 m³ and 20m height at the city of Matanzas, which has endured extreme winds of 240 km / h, with gusts to 320 km / h, measured at the site, structurally unaffected.

The requirements of this foundation, together with the background of the design and construction of a reservoir as a "water drop" shape for the treatment plant of the city of Santiago de Cuba a few years earlier (Figure 3), led Pimpo Hernández to develop, during 1969, a novel method of calculation sheets that generalized the method of "projects solicitations" on a Cartesian plane (Pücher, 1934) as a method called "Relative Coordinates", given the possibility of using other reference surfaces and select the most suitable for the calculation of each sheet, including the possibility that the equation of the plate can be replaced only by a scalar function of the lines of curvature of the reference surface in the normal vector direction (Hernández, 1970). The calculation of shells foundations of revolution with guideline of Gaussian form would not have been possible, at such moment, without a development of calculation methods such as the one which implied this generalization of the method of Pücher using Relative Coordinates, finally calculated over a polar plane.



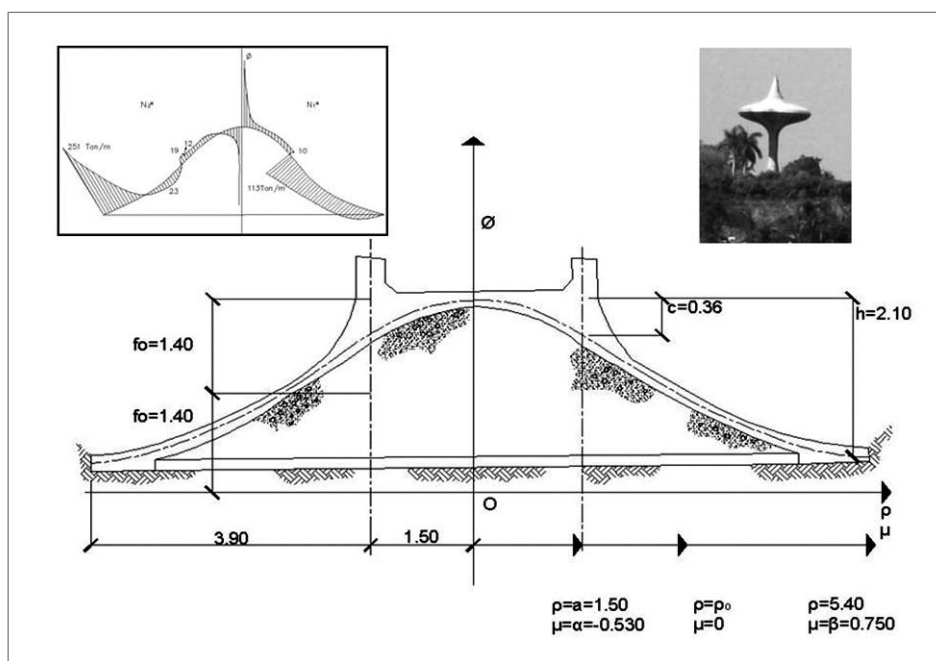


Figura 3. Cimiento laminar en forma de Campana de Gauss (Matanzas) y depósito elevado en forma de "gota de agua" (Santiago de Cuba) del Ing. José E. (Pimpo) Hernández

Figure 3. Laminar foundation in the shape of a Gaussian Bell (Matanzas) and elevated water tank in the shape of a "water drop" (Santiago de Cuba) by Eng. Jose E. (Pimpo) Hernandez

La Conferencia Internacional sobre "Cimientos para estructuras tipo torre" desarrollada por la IASS en 1970 y la VIII Conferencia Internacional de Mecánica de Suelos y Cimentaciones de 1973 marcaron una síntesis prolifera de las investigaciones sobre esta temática. Sin embargo, las investigaciones experimentales y los modelos numéricos para los problemas relacionados con la interacción suelo-lámina, la distribución de las presiones de contacto entre suelo y cimiento, el cálculo de asentos, la capacidad soportante de los suelos y el estudio de las zonas de plasticidad contenida por efecto de concentración de tensiones en cimientos laminares sobre arenas, arcillas y suelos blandos en general, estaban aún en ciernes y se identificaban como un problema de investigación a futuro.

Ya fueran los 45cm de espesor en el "folded plate" del edificio en la Habana, los 30 cm del cimiento en Güines, o los 20cm del cimiento en forma de Campana de Gauss en Matanzas, los cimientos laminares iniciaron su presencia en la ingeniería estructural en Cuba al unísono de su entorno internacional y arrastraron consigo el desarrollo de los métodos de cálculo y las inquietudes sobre el comportamiento de los suelos, en una época en que Nabor Carrillo, ex-Rector de la UNAM, prologaba los primeros libros publicados en México sobre "Mecánica de suelos", escritos por Eulalio Juárez Badillo y Alfonso Rico.

The International Conference on "Foundations for tower-like structures" developed by IASS in 1970 and the VIII International Conference on Soil Mechanics and Foundations, 1973, marked a prolific synthesis of research on this topic. However, experimental studies and numerical models for problems related to soil-blade, the distribution of contact pressure between soil and foundation, the calculation of seat-supporting capacity of soils and the study of zones of contained plasticity by stress concentration effect on building shells on sand, soft clays and soft soils in general were still in its beginnings and identified as a problem of future research.

Whether it was 45cm thick in the "folded plate" of the building in La Habana, the 30 cm of foundation in Guines, or 20cm of the foundation as a bell curve in Matanzas, the shells foundation began its presence in structural engineering in Cuba in unison with its international environment and dragged it the development of calculation methods and concerns about the behavior of the soil, at a time when Nabor Carrillo, former Rector of the UNAM, prefaced the first books published in Mexico on "Soil Mechanics", written by Eulalio Juarez-Badillo and Alfonso Rico.

2.2 El desarrollo del método de las coordenadas relativas

El método de las Coordenadas Relativas para el cálculo membranar de láminas fue desarrollado y aplicado a casos de cubiertas, depósitos y cimentaciones en una serie de artículos de la Revista "Ingeniería Civil" a comienzo de la década de los años setenta (Hernández et al, 1973; 1974-a; 1974-b; 1975-a; 1975-b) a partir de dos ideas básicas (Figura 4-a).

- Definir una superficie de referencia arbitraria S, de geometría conocida, en función de sus líneas de curvatura (α_1, α_2) , mediante el vector de posición de un punto arbitrario P de su superficie como: $\vec{r} = \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2)$
- Definir la función $f = f(\alpha_1, \alpha_2)$ como ecuación escalar relativa de la lámina S* que se desea calcular con respecto a la superficie de referencia arbitraria S y sus líneas de curvatura (α_1, α_2) , mediante una función de las distancias PP*, medidas en la dirección del vector normal a la superficie de referencia S, (\vec{e}_n) hasta alcanzar cada punto S* de la lámina real a calcular.

Con lo cual, la ecuación relativa de la superficie S* de la lámina real queda expresada en función de las líneas de curvatura de la superficie de referencia como:

$$\vec{r}^*(\alpha_1, \alpha_2) = \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\vec{e}_n f}{2.1}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1)$$

Y toda la geometría de la lámina real S* se puede expresar así en función de los Parámetros de Lamé $[(A)_1, (A)_2]$ los vectores unitarios $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_n)$ y sus derivadas en la superficie de referencia S, así como la ecuación relativa $f = f(\alpha_1, \alpha_2)$ entre ambas superficies, con lo que se puede generalizar el concepto de "solicitaciones proyectadas" al relacionarse las longitudes de arco y vectores unitarios de ambas superficies mediante relaciones del tipo:

$$K_i = \left[\left(1 + \frac{f}{R_i} \right)^2 + \frac{f^2}{A_i d\alpha_i} \right]^{1/2}; \quad |d\vec{r}_i^*| = K_i A_i d\alpha_i = K_i ds_i$$

$$B_i = \tan \beta_i = \frac{A_i d\alpha_i}{1 + \frac{f}{R_i}}; \quad \cos \varpi = \text{sen} \beta_1 \text{sen} \beta_2; \quad D = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{\text{sen} \varpi} \quad (2)$$

$$C_{ii} = \frac{1 + B_i^2}{R_i} - \frac{B_i}{\rho_i} - \frac{B_i}{A_i d\alpha_i}; \quad C_{ij} = \frac{B_i B_j + B_j}{R_i} - \frac{B_j}{\rho_i} - \frac{B_j}{A_i \alpha_i}$$

$$\vec{e}_i^* = \vec{e}_i \cos \beta_i + \vec{e}_n \text{sen} \beta_i; \quad \vec{e}_n^* = (-B_1 \vec{e}_1 - B_2 \vec{e}_2 + \vec{e}_n) D; \quad \text{para todo } (i; j = \overrightarrow{1;2})$$

$\alpha_i \rightarrow$ Coordenadas Gaussianas/Gaussian Coordinates; $A_i \rightarrow$ Parámetro de Lamé/Lamé Parameter; $ds_i \rightarrow$ Diferencial de arco/Differential arc
 $R_i \rightarrow$ Radio de Curvatura Gaussiana/Gaussian Curvature Radius; ρ_i Radio de Curvatura Geodésico/Geodesic Curvature Radius

2.2 The development of the method of relative coordinates

The method of Relative Coordinates for the calculation sheet membrane was developed and applied to cases of roofs, tanks and foundations in a number of articles of the "Civil Engineering" Magazine at the beginning of the decade of the seventies (Hernández et al, 1973, 1974-a, 1974-b, 1975-a, 1975-b) from two basic ideas (Figure 4-a).

- To define an arbitrary reference surface S of known geometry, according to its lines of curvature (α_1, α_2) , by the position vector of an arbitrary point P on its surface as: $\vec{r} = \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2)$
- To define the role $f = f(\alpha_1, \alpha_2)$ as relative scalar equation of sheet S* to be calculated with respect to arbitrary reference surface S and its lines of curvature (α_1, α_2) , through a distance PP* function, measured in the direction of surface of reference normal vector S, (\vec{e}_n) until reaching each point S* of the real sheet to be calculated.

Whereupon, the equation for the surface S* of the real sheet is expressed in terms of lines of curvature of the reference surface as:

And all the geometry of the real sheet S* can be expressed as a function of the Lamé parameters $[(A)_1, (A)_2]$ by the unit vectors $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_n)$ and its derivatives at the reference surface S, and the relative equation $f = f(\alpha_1, \alpha_2)$ between the two surfaces, with which it can be generalize the concept of "designed solicitations" to relate the arc lengths and unit vectors on both surfaces by relations of the type:

Donde el caso $f=0$, implica que la superficie de referencia S coincide con la superficie media de la lámina S^* que se desea calcular en líneas de curvatura, lo que provoca que $K_i=1$, $B_i=\beta_i=0$, etc. o para el caso $\alpha_1=x$; $\alpha_2=y$; y $f(\alpha_1, \alpha_2)=z(x,y)$ coincidiría con Pücher, y la superficie de referencia sería un plano cartesiano (x,y) .

Where $f=0$ it means that the reference surface S coincides with the average size of the sheet S^* to be calculated in lines of curvature, which causes that for that $K_i=1$, $B_i=\beta_i=0$ matter would $\alpha_1=x$; $\alpha_2=y$; y $f(\alpha_1, \alpha_2)=z(x,y)$ coincide with Pücher, and the reference surface would be a Cartesian plane (x,y) .

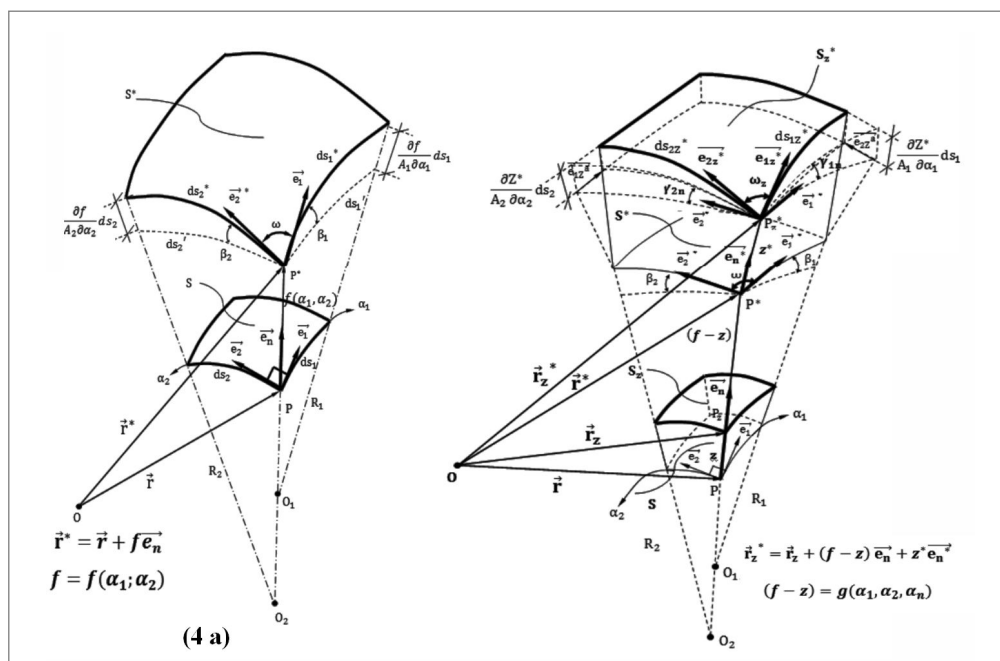


Figura 4. Coordenadas Relativas entre dos superficies (4 a) y entre dos medios tridimensionales (4 b)
Figure 4. Relative coordinates between two surfaces (4a) and between two tridimensional means (4b)

El método de las Coordenadas Relativas abrió así no menos de tres nuevos caminos al cálculo de las estructuras laminares:

- Estableció la base geométrica para generalizar las ideas de Pücher relativas a la introducción de "solicitaciones proyectadas" sobre un plano cartesiano y creó la posibilidad de seleccionar la superficie de referencia S más adecuada para el cálculo de cada cáscara en función de su forma, cargas y/o condiciones de apoyo (Ejemplo: plano polar o cilindro coaxial para una cáscara de revolución con cargas en la dirección del vector \vec{e}_n o \vec{e}_n^* ; plano cartesiano para el cálculo de un paraboloid hiperbólico de base rectangular, paralela a sus asíntotas, etc.).

The method of Relative Coordinates opened at least three new ways to calculate shells structures:

- It established the geometric base for generalizing Pücher's ideas in relation to the introduction of "projected solicitations" on a Cartesian plane, creating the possibility of selecting the surface of reference S more suitable for the calculation of each shell according to its shape, charge and/or conditions of support (Example: polar plane or a cylinder coaxial for a shell of revolution with loads in the direction of the vector \vec{e}_n o \vec{e}_n^* ; Cartesian plane for the calculation of a rectangular base hyperbolic paraboloid, parallel to its asymptotes, etc.)

- Aportó una nueva vía para calcular cáscaras de forma compleja, carentes de expresión analítica para describir su superficie media, si se establece, por vía analítica o numérica, una ecuación relativa de las distancias entre la superficie media de la cáscara S^* y una superficie de referencia S conocida, mediante una función del tipo $f=f(\alpha_1, \alpha_2)$
- Amplió las posibilidades de calcular, en "solicitaciones proyectadas", problemas de contorno que posean una forma geométrica más simple sobre una superficie de referencia S que sobre la superficie media real S^* de la cáscara, como es el caso de dos cilindros de igual diámetro, que corten sus ejes longitudinales a 90 grados, y cuya curva alabeada de intersección en el espacio, proyecta, como contorno, una línea recta diagonal sobre un plano cartesiano, seleccionado como superficie de referencia S para su cálculo.

Una prueba de las potencialidades de este enfoque geométrico surgía, casi simultáneamente, en la segunda mitad de los años setenta cuando un grupo de investigadores del Instituto de Aviación de Kazan (Paimuchin et al., 1975; 1977; 1980), sin hacer uso del método de las "solicitaciones proyectadas" de Pücher, propusieron una ecuación geométrica similar para el cálculo aproximado de cáscaras rebajadas y establecieron las ecuaciones básicas para el cálculo de cáscaras de formas complejas como las "linternas" y otras piezas de aviones desde esta perspectiva geométrica, con enfoques lineales y no lineales en el cálculo de cáscaras tipo "sándwich" de espesores constantes y variables, mediante superficies aproximadas de cálculo.

Mientras, en Cuba, desde la segunda mitad de los años setenta y hasta la década de los noventa, continuaron las investigaciones en el método de las Coordenadas Relativas con "solicitaciones proyectadas" y se alcanzaron nuevos resultados que permitieron la nificación de las Coordenadas Relativas con los métodos tradicionales de la geometría diferencial de cáscaras no referida a líneas de curvatura (Castañeda, 1984-a) y su generalización para cáscaras de espesores medios y gruesos, que no puedan ser reducidas a una superficie media (Castañeda, 1985; 1995), mediante la introducción de la ecuación relativa entre dos medios tridimensionales S_z y S_z^* , y sus desarrollos derivados en geometría diferencial (Figura 4-b),

- It provided a new way to calculate shells of complex shape without analytical expression to describe their average size, setting, through analytical or numerical way, an equation concerning the distances between the medial surface of the shell S^* and an area of reference known as S by a function type $f=f(\alpha_1, \alpha_2)$
- It extended the possibilities of calculating in "projected solicitations", boundary problems having a simpler geometric shape on a reference surface S than on the actual average surface S^* of the shell, as it is the case of two cylinders of equal diameter, that cut their long axes at 90 degrees, and whose curve of intersection in warped space, projected as a contour, a straight diagonal line over a Cartesian plane, selecting S as a reference surface for its calculation.

A test of the potential of this geometric approach arose almost simultaneously in the second half of the seventies when a group of researchers from the Kazan Aviation Institute (Paimuchin et al., 1975, 1977, 1980), without using Pücher's method of "projected solicitations", proposed a similar geometric equation for the approximate calculation of shells lowered and set the basic equations for calculating shells of complex shapes such as "flashlights" and other aircraft parts from this geometric perspective, with linear and nonlinear approaches for the calculation of shells of "sandwich" type of constant and variable thickness by calculating approximate surface.

While in Cuba, since the mid-seventies until the nineties, continued research on the method of relative coordinates with "projected solicitations" and new results were achieved that allowed the planning of the relative coordinates with traditional methods of differential geometry of shells not referred to lines of curvature (Castañeda, 1984-a) and its generalization for thick and media shells, which can not be reduced to an average size (Castañeda, 1985, 1995), through the introduction of the equation between two three-dimensional media S_z and S_z^* , and developments resulting in differential geometry (Figure 4-b),



$$\vec{r}_z^*(\alpha_1, \alpha_2, z^*) = \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \vec{e}_n f(\alpha_1, \alpha_2) + z^* \vec{e}_n^* \quad (3)$$

Donde, la geometría del medio tridimensional real $S_z^*(\alpha_1, \alpha_2, z^*)$, queda en función de la geometría del medio tridimensional de referencia $S_z^*(\alpha_1, \alpha_2, z)$ para todo: $z = z^* D$; o $z = z^*/D$ siempre y cuando:

Where the geometry of the real three-dimensional media, $S_z^*(\alpha_1, \alpha_2, z^*)$, is based on the geometry of the referential three-dimensional $S_z^*(\alpha_1, \alpha_2, z)$ media for everything: $z = z^* D$; o $z = z^*/D$ providing that:

$$K_{iz} = \left[\left(1 + \frac{f+z}{R_i} - \frac{zB_j}{\rho_i} - \frac{\partial(zB_i)}{A_i \partial \alpha_i} \right)^2 + \left(\frac{zB_i}{\rho_i} - \frac{\partial(zB_j)}{A_i \partial \alpha_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{A_i \partial \alpha_i} + \frac{\partial z}{A_i \partial \alpha_i} + \frac{zB_i}{R_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$K_{nz} = \left[\left(\frac{\partial(B_1 z)}{A_n \partial \alpha_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial(B_2 z)}{A_n \partial \alpha_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{A_n \partial \alpha_n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad \left| \overline{dr}_{iz}^* \right| = K_{iz} A_i d\alpha_i = K_{iz} ds_i$$

$$\left| \overline{dr}_{nz}^* \right| = K_{nz} A_n d\alpha_n = K_{nz} ds_n \quad (4)$$

$$G_i = \tan \gamma_i = \frac{\frac{z D_{ii}}{K_i \cos \beta_i}}{\left(1 + \frac{z \cos \beta_i C_{ii}}{K_i} \right)}; \quad D_{ii} = D [C_{ij} - B_i B_j \cos^2 \beta_i C_{ii}]$$

$$\cos \omega_z = \text{sen} \omega \text{sen} (\gamma_1 + \gamma_2) + \cos \omega \cos (\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$\vec{e}_{iz}^* = \vec{e}_i^* \cos \gamma_i + \vec{e}_j^* \text{sen} \gamma_i; \quad \vec{e}_j^* = \frac{1}{\text{sen} \omega} \vec{e}_i^* - \frac{\cos \omega}{\text{sen} \omega} \vec{e}_j^*; \quad \text{para todo } (i, j = \overline{1; 2})$$

En estos trabajos (Castañeda, 1985; 1995) se establecieron las condiciones de ortogonalidad de los vectores unitarios en la superficie media de la cáscara mediante su ecuación en coordenadas relativas $\beta_1 = 0$, o $\beta_2 = 0$, asociados al caso en que ($\varpi = 90^\circ$); las condiciones de rebajamiento de una cáscara sobre su superficie de referencia cuando no se requiera de solicitaciones y deformaciones proyectadas (si β_1 y β_2 tienden a cero simultáneamente), rectificando criterios de Paimuchin V.N. sobre las condiciones de ortogonalidad y rebajamiento de estas cáscaras con respecto a sus superficies de cálculo, además de formularse las relaciones geométricas en coordenadas relativas para un sistema de referencia no ortogonal, en correspondencia con los criterios geométricos para un punto de una cáscara gruesa (Goldenveizer, 1953).

In these works (Castañeda, 1985, 1995) were established the conditions of orthogonality of the unit vectors in the average surface of the shell by its equation of relative coordinates $\beta_1 = 0$, o $\beta_2 = 0$, associated to ($\varpi = 90^\circ$); the case where the conditions for lowering a shell on its surface when not required solicitations and projected deformations (si β_1 y β_2 if and tend to zero simultaneously), V.N. Paimuchin correcting criteria on the conditions of orthogonality and of debasement of these shells in relation to their surface calculation and establish geometric relations in relative coordinates for an orthogonal reference system, in correspondence with the geometric criteria for a point of a thick shell (Goldenveizer, 1953).

Así, se introdujeron en la teoría membranal los "corrimientos proyectados" (Castañeda, 1981-a) y las "deformaciones proyectadas" (Castañeda, 1982-a; 1982-b, 1982-c) para trasladar todo el proceso de cálculo a la superficie de referencia en problemas hiperestáticos, apoyados en el método de la dualidad de las ecuaciones estático-geométricas (Rianitsyn, 1974) y el método de los Trabajos Virtuales (Hernández, 1982), creándose condiciones para la obtención de las ecuaciones básicas de la teoría de la flexión tipo Love-Kirchoff, y tipo Timoshenko, en Coordenadas Relativas con solicitaciones, deformaciones y corrimientos proyectados en la superficie de referencia (Castañeda, 1983-a; 1983-b y 1983-c),

Thus, membrane theory included the "projected displacements" (Castañeda, 1981-a) and "projected deformations" (Castañeda, 1982-a, 1982-b, 1982-c) to move the whole process of calculation to the reference surface on hiperstatic problems, supported by the method of dual static-geometric equations (Rianitsyn, 1974) and the method of virtual work (Hernández, 1982), creating conditions for obtaining the basic equations of the theory of flexion of Love-Kirchhoff type and Timoshenko type in Relative Coordinates to solicitations, deformations and displacements projected on the reference surface (Castañeda, 1983-a, 1983-by 1983-c),



lo que era vital para dar integralidad y complementación al método en los casos "no membranales", extender los resultados a experimentos físicos en laboratorios estructurales (1984-b), y conformar un enfoque estático-geométrico integral que generalizara el Método de Pücher para cualquier superficie de referencia en teoría membranal, flexión y en el análisis de cáscaras gruesas, que fue el resultado más significativa de esta etapa en cuanto al desarrollo de los métodos de cálculo (Figura 5).

Las ecuaciones de equilibrio (2.5), geométricas (2.6), físicas o constitutivas (2.7), de solicitaciones proyectadas a solicitaciones reales (2.8) y de deformaciones proyectadas a deformaciones reales (2.9) en Coordenadas Relativas para la teoría de la flexión tipo Love-Kirchoff en la cual el elemento recto y normal a la superficie media de la cáscara permanece recto y normal después de la deformación, contiene para ($f = 0$) los casos clásicos en coordenadas intrínsecas de Gauss; y para $\alpha_1 = x; \alpha_2 = y; \gamma^f(\alpha_1, \alpha_2) = z(x, y)$ las ecuaciones de Pücher, lo que muestra la validez de este enfoque así como las nuevas posibilidades creadas para establecer y resolver los problemas de contorno (plano polar, cilindro coaxial, etc.) con solo introducir los parámetros geométricos de su primera y segunda forma cuadrática si se dispone de una función del tipo $f = f(\alpha_1, \alpha_2)$.

Además, el método de la Dualidad (Tabla 1), aplicado entre las ecuaciones de equilibrio (2.5) y las ecuaciones geométricas (2.6), corroboró las relaciones entre el vector de los desplazamientos proyectados (lineales y angulares) como consecuencia de desprestigiar las deformaciones de cortante (Q_i) en la Teoría de Love-Kirchoff y considerar la rigidez infinita de la cáscara con respecto a la torsión en un eje normal a su superficie media \vec{e}_n^* como corresponde a este enfoque.

which was vital to provide integration and complementation to the method where "no membrane" extend the results to structural laboratory experiments in physics (1984-b), and form a static-geometric view point that generalizes Pücher's method for any reference surface membrane theory, bending and analysis of thick shells, which was the most significant result of this stage in the development of methods of calculation (Figure 5).

The equilibrium equations (2.5), geometric (2.6), physical or constitutive (2.7), of projected solicitations to real solicitations (2.8) and deformation projected to actual deformation (2.9) in Relative Coordinates to the theory of bending type Love-Kirchoff in which the straight and normal element to the shell middle surface remains straight and normal after deformation, has for ($f = 0$) the classic cases of Gauss intrinsic coordinates, and for $\alpha_1 = x; \alpha_2 = y; \gamma^f(\alpha_1, \alpha_2) = z(x, y)$ Pücher's equation showing the validity of this approach and the new possibilities created to establish and solve boundary problems (polar plane, cylindrical, coaxial, etc..) only by introducing the geometric parameters of the first and second quadratic form if it has a function of the type $f = f(\alpha_1, \alpha_2)$.

Furthermore, the method of Duality (Table 1), applied between the equilibrium equations (2.5) and the geometrical equations (2.6), confirmed the relationship between the projected displacement vector (linear and angular) as a result of neglecting deformations shear (Q_i) in Love-Kirchoff Theory and consider the infinite stiffness of the shell with respect to the torsion of the normal axis to its average surface \vec{e}_n^* , as it corresponds to this approach.

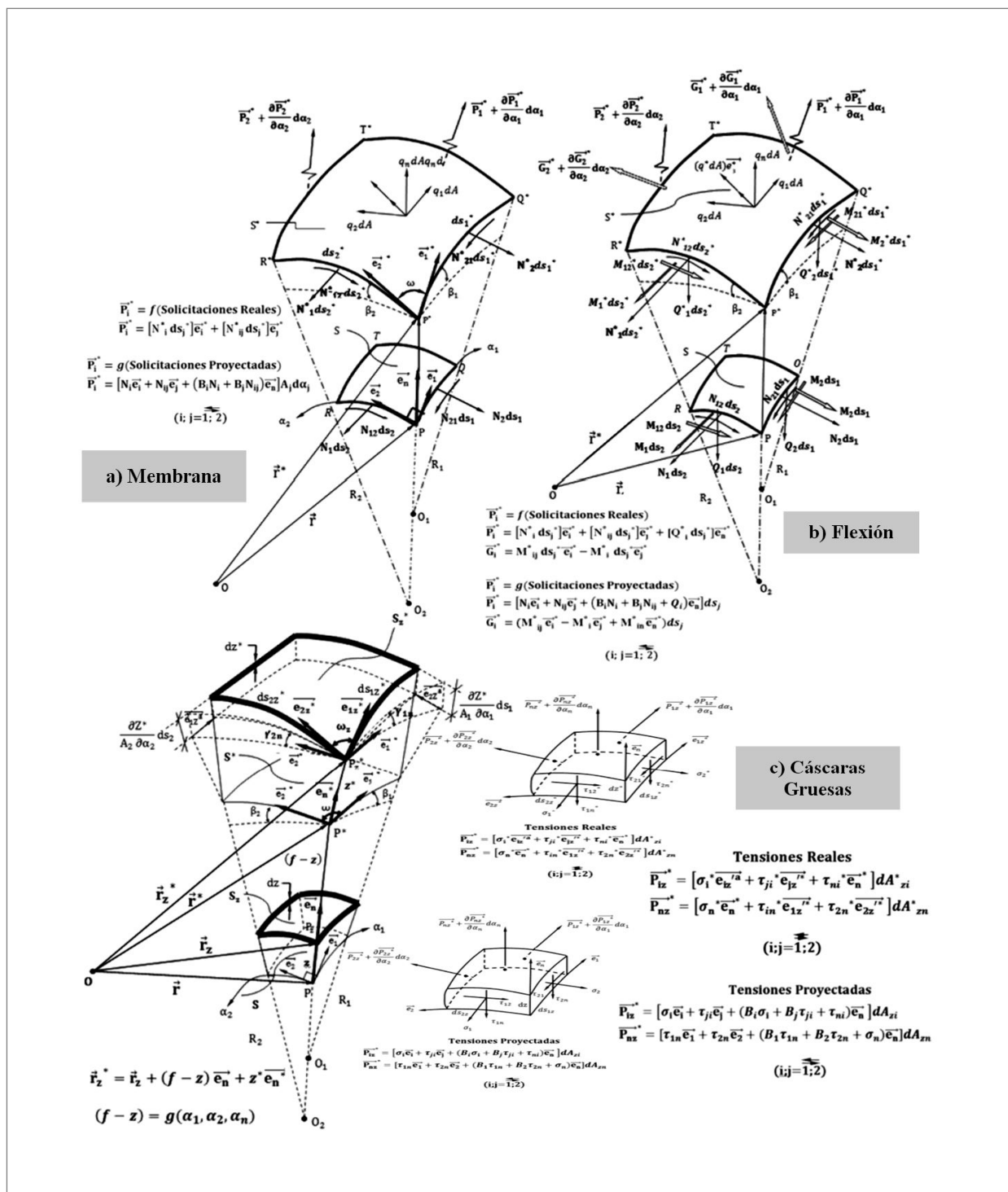


Figura 5. Modelación del Método de Pücher en Coordenadas Relativas para los diferentes niveles de análisis de cáscaras: a) Membrana; b) Flexión; c) Cáscaras gruesas.

Figure 5. Modeling of Pucher Method in Relative Coordinates for different levels of shells analysis a) membrane; b) flexion; c) thick shells

Ecuaciones de equilibrio en solicitaciones proyectadas

Equilibrium equations in projected solicitations

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{\rho_j} + \frac{B_j}{R_j}\right) N_i + \left(\frac{1}{\rho_i} + \frac{B_i}{R_i}\right) N_{ij} - \frac{N_j}{\rho_j} + \frac{N_{ji}}{\rho_i} + \frac{Q_i}{R_i} + \frac{\partial N_i}{A_i \partial \alpha_i} + \frac{\partial N_{ji}}{A_j \partial \alpha_j} + q_i = 0 \\
 & C_{ii} N_i + C_{ij} N_{ij} + C_{ji} N_{ji} + C_{jj} N_j + \left(\frac{B_i}{R_i} - \frac{1}{\rho_i}\right) Q_i + \left(\frac{B_j}{R_j} - \frac{1}{\rho_j}\right) Q_j - \frac{\partial Q_i}{A_i \partial \alpha_i} - \frac{\partial Q_j}{A_j \partial \alpha_j} - q_n + B_i q_i + B_j q_j = 0 \\
 & \frac{\partial M_{ij}}{A_i \partial \alpha_i} + M_{ij} \left(\frac{1}{\rho_j} + \frac{B_j}{R_j}\right) + \frac{\partial M_j}{A_j \partial \alpha_j} + \frac{M_j}{\rho_j} - M_i \left(\frac{1}{\rho_i} + \frac{B_i}{R_i}\right) + \frac{M_{ji}}{\rho_j} + N_{ij} \frac{\partial f}{A_i \partial \alpha_i} + \\
 & -N_{ji} \left(1 + \frac{f}{R_i}\right) B_i - \left(1 + \frac{f}{R_j}\right) Q_j + m_i = 0; \quad \text{para todo } (i,j=\overline{1;2}) \\
 & -C_{ij} M_i + C_{ji} M_j + C_{ii} M_{ij} - C_{jj} M_{ji} - Q_i \left(1 + \frac{f}{R_i}\right) B_j - Q_j \left(1 + \frac{f}{R_j}\right) B_i - m_j B_j + m_i B_i + \\
 & + N_{ij} \left[B_i \frac{\partial f}{A_i \partial \alpha_i} - \left(1 + \frac{f}{R_i}\right) (1 + B_j^2) \right] - N_{ji} \left[\left(1 + \frac{f}{R_j}\right) (1 + B_i^2) - B_j \frac{\partial f}{A_j \partial \alpha_j} \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Donde:

Where:

q₁; q₂; q_n; m₁; m₂: Son fuerzas y momentos máxicos en la dirección $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \text{ y } \vec{e}_n$
Q₁ y Q₂: Son los esfuerzos cortantes proyectados

q₁; q₂; q_n; m₁; m₂: Forces and moments are mass flow in the direction $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \text{ y } \vec{e}_n$
Q₁ y Q₂: Are the projected shear

Ecuaciones geométricas en deformaciones y desplazamientos proyectados

Geometric equations projected deformations and displacements

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ii} &= \delta_{ii} + B_i \delta_{i3}; & \gamma_{ij} &= K_1 \cos \beta_1 (\delta_{21} + B_1 \delta_{23}) + K_2 \cos \beta_2 (\delta_{12} + B_2 \delta_{13}) \\
 \varkappa_{ij} &= -\delta'_{ij}; & \varkappa_{ij} &= -\delta'_{ij};
 \end{aligned}$$

Donde: $\frac{\partial \vec{u}}{A_i \partial \alpha_i} = \delta_{ii} \vec{e}_i + \delta_{ij} \vec{e}_j + \delta_{i3} \vec{e}_n$; $\frac{\partial \vec{\Omega}}{A_i \partial \alpha_i} = \delta_{ii}' \vec{e}_i + \delta_{ij}' \vec{e}_j + \delta_{i3}' \vec{e}_n$; $\frac{1}{2} \text{rot} \vec{u} = \vec{\Omega}$

Y:

$$\begin{aligned}
 \delta_{ii} &= \frac{\partial u_i}{A_i \partial \alpha_i} + \frac{u_j}{\rho_i} + \frac{u_n}{R_i}; & \delta_{ii}' &= (-1)^i \left[\frac{\partial \psi_j}{A_i \partial \alpha_i} - \frac{\psi_i}{R_i} \right] + \frac{\delta}{R_i} \\
 \delta_{ij} &= \frac{\partial u_j}{A_i \partial \alpha_i} - \frac{u_i}{\rho_i}; & \delta_{ij}' &= (-1)^i \left[-\frac{\partial \psi_i}{A_i \partial \alpha_i} - \frac{\psi_j}{\rho_i} \right] \\
 \delta_{i3} &= \frac{\partial u_n}{A_i \partial \alpha_i} - \frac{u_i}{R_i}; & \delta_{i3}' &= \frac{\partial \delta}{A_i \partial \alpha_i} + (-1)^i \left(-\frac{\psi_j}{R_i} \right)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Ecuaciones físicas constitutivas en solicitaciones y deformaciones proyectadas.

Constitutive physical equations and deformations projected solicitations.

$$\begin{aligned}
 N_i &= \frac{2Eh}{1-\mu} \left[\frac{K_j \cos^2 \beta_i}{K_i \text{sen}^3 \omega} \varepsilon_i + \frac{D}{\text{sen}^2 \omega} \varepsilon_j - \frac{\cos \omega \cos \beta_i}{K_i \text{sen}^3 \omega} \gamma_{ij} \right] \\
 N_{ij} &= \frac{2Eh K_j \cos \beta_j}{1-\mu^2} \left[-\frac{\cos \omega \cos \beta_i}{K_i \text{sen}^3 \omega} \varepsilon_i - \frac{\cos \omega \cos \beta_j}{K_j \text{sen}^3 \omega} \varepsilon_j + \frac{\gamma_{12}(1 + \cos^2 \omega - \mu \text{sen}^2 \omega)}{2K_i K_j \text{sen}^3 \omega} \right] \\
 M_i &= \frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)\text{sen} \omega} \left(\frac{K_j \cos^2 \beta_j}{K_i} \kappa_i + \mu \cos \beta_i \cos \beta_j \kappa_j \right) \\
 M_{ij} &= \frac{2Eh^3 \kappa_{ij} K_j \cos \beta_i}{3(1+\mu)\text{sen} \omega}; \text{ Siempre que : } \left(1 + \frac{Z^*}{R_i^*} \right) \approx 1 \text{ para todo } (i, j = \overline{1, 2}) \quad (7)
 \end{aligned}$$

E: Módulo de elasticidad/Elasticity modulus; μ : Coeficiente de Poisson/Poisson ratio; h: Espesor/Thickness
 N_i, N_j : Solicitación normal proyectada/Projected normal solicitation; N_{ij} : Solicitación tangencial proyectada/Projected tangential solicitation
 M_i, M_j : Solicitación de torsión proyectada/Projected torsional solicitation; M_{ij} : Solicitación de flexión proyectada/Projected bending solicitation
 $\varepsilon_i, \varepsilon_j$: Deformación longitudinal proyectada/Projected longitudinal deformation; γ_{ij} : Distorsión proyectada/Distortion projected
 κ_i, κ_j : Deformación de torsión proyectada/Projected torsional deformation; κ_{ij} : Deformación de flexión proyectada/bending deformation projected

Relaciones entre solicitaciones proyectadas y solicitaciones reales

Relationship among projected solicitations and actual solicitations

$$\begin{aligned}
 N_i &= N_i^* K_j \cos \beta_i - DB_i Q_i^* K_j; & N_{ij} &= N_{ij}^* K_j \cos \beta_j - DB_j Q_i^* K_j; & Q_i &= \frac{K_j Q_i^*}{D^2} \quad (8) \\
 M_{ij} &= M_{ij}^* K_j \cos \beta_i; & M_i &= M_i^* K_j \cos \beta_j;
 \end{aligned}$$

Relaciones entre deformaciones proyectadas y las deformaciones reales

Relationship among projected deformations and actual deformations

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_i^* &= \frac{\cos \beta_i}{K_i} \varepsilon_i; & \gamma_{12}^* &= \frac{\gamma_{12}}{K_1 K_2 \text{sen} \omega} - \left(\frac{\cos \beta_1}{K_1} \varepsilon_1 + \frac{\cos \beta_2}{K_2} \varepsilon_2 \right) \frac{\cos \omega}{\text{sen} \omega} \quad (9) \\
 \kappa_i^* &= \frac{\cos \beta_j}{K_i} \kappa_i; & \kappa_{ij}^* &= \frac{\cos \beta_i}{K_i} \kappa_{ij};
 \end{aligned}$$

El método de las Coordenadas Relativas busca hoy nuevos desarrollos en torno a la obtención de Ecuaciones de Compatibilidad de las Deformaciones tipo Saint Venant y Funciones de Tensión tipo Airy, Maxwell o Morera mediante el método de la Dualidad (Rianitsyn, 1974) y la Analogía estático-geométrica (Castañeda, 1985, 1993) para el cálculo con solicitaciones y deformaciones proyectadas mediante métodos inversos y semi-inversos asociados al grado de hiperestaticidad de las cáscaras, con soluciones en Diferencias Finitas, donde el operador transpuesto de la ecuación diferencial ordinaria:

The method of Relative Coordinates seeks new developments today pointing to the obtention of Compatibility Equations of Deformity type Saint Venant and Airy stress function, Maxwell or Morera through Duality method (Rianitsyn, 1974) and static -geometric analogy (Castañeda, 1985, 1993) for the solicitations and deformations calculation projected by using semi-inverse and inverse methods associated with the hiperelasticity degree of the shells, with Finite Difference solutions, where the operator transpose of the ordinary differential equation:



$$P(x) = L[N(x)] = a^{(0)}N + a^{(1)}\frac{d(b^{(1)}N)}{dx} + \dots + a^{(k)}\frac{d^{(k)}(b^{(k)}N)}{dx^k}; \text{ tiene la forma}$$

y el operador transpuesto de la ecuación diferencial en derivadas parciales:

and the transposed operator of differential equation in partial derivatives:

$$\varepsilon(x) = L^*[U(x)] = a^{(0)}U - b^{(1)}\frac{d(a^{(1)}U)}{dx} + \dots + (-1)b^{(k)}\frac{d^{(k)}(b^{(k)}U)}{dx^k} \quad (10)$$

$$P(x) = \sum_k \sum_l \sum_m \dots a^{(k,l,m)} \frac{\partial^k \partial^l \partial^m \dots (b^{(k,l,m)}N)}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m}; \text{ tiene la forma:}$$

$$\varepsilon(x) = \sum_k \sum_l \sum_m \dots (-1)^{(k+l+m)} a^{(k,l,m)} \frac{\partial^k \partial^l \partial^m \dots (b^{(k,l,m)}U)}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m} \quad (11)$$

Cuando $a^{(0)}, a^{(1)} \dots a^{(m)}$, y $b^{(0)}, a^{(1)} \dots b^{(m)}$, son funciones de las diferentes variables y ($k \in \mathbb{N}$), lo que permite obtener las ecuaciones geométricas de la transposición de las ecuaciones de equilibrio (Rianitsyn, 1974) como se muestra en la Tabla 1 que introduce por filas las ecuaciones de equilibrio (2.5) y extrae por columnas las ecuaciones geométricas (2.6).

When $a^{(0)}, a^{(1)} \dots a^{(m)}$, and $b^{(0)}, a^{(1)} \dots b^{(m)}$, are functions of the different variables and ($k \in \mathbb{N}$), which allows to obtain the geometric equations transposing equations of equilibrium (Rianitsyn, 1974) as shown at Table 1 introducing equilibrium equations per rows (2.5) and extracting per column geometric equations (2.6).

Tabla 1. Relación transpuesta del método de la dualidad para la teoría de Love-Kirchoff
Table 1. Relationship transpose duality method for the Love-Kirchoff theory

Solicitaciones	N_1	N_2	N_{12}	N_{21}	Q_1	Q_2	M_1	M_2	M_{12}	M_{21}	M_{1N}	M_{2N}	u_1, ψ_1	N_i, M_i
$\Sigma F(\bar{e}_1) = 0$	$A_2 \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1} + \dots$...	$\frac{A_1 A_2}{\rho_2} + \dots$...	$\frac{A_1 A_2}{R_1}$									u_1
$\Sigma F(\bar{e}_2) = 0$	$-\frac{A_1 A_2}{\rho_1}$...	$A_2 \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1} + \dots$...		$\frac{A_1 A_2}{R_2}$								u_2
$\Sigma F(\bar{e}_N) = 0$	$B_1 A_2 \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1} + \dots$...	$B_2 A_1 \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1} + \dots$...	$\frac{A_1 A_2}{\rho_2} + A_2 \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1}$	$\frac{A_1 A_2}{\rho_1} + A_1 \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_2}$					↓	↓		ψ_N
$\Sigma M(\bar{e}_1) = 0$						$-(1 + \frac{f}{R_2}) A_1 A_2$	$-\frac{A_1 A_2}{\rho_1}$...	$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1} + \dots$...	$\frac{A_1 A_2}{R_1}$			ψ_1
$\Sigma M(\bar{e}_2) = 0$					$-(1 + \frac{f}{R_1}) A_1 A_2$		$-A_2 \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_2} + \dots$...	$\frac{A_1 A_2}{\rho_1}$...		$\frac{A_1 A_2}{R_1}$		ψ_2
$\Sigma M(\bar{e}_N) = 0$					↓	↓		...	$\frac{A_1 A_2}{R_1}$...	$\frac{A_1 A_2}{\rho_2} + A_2 \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1}$	$\frac{A_1 A_2}{\rho_1} + A_1 \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_2}$		δ
ε_i, κ_i	$\varepsilon_1 A_1 A_2$	$\varepsilon_2 A_1 A_2$	$\gamma_{12} A_1 A_2$	$\gamma_{21} A_1 A_2$	NO HAY	NO HAY	$\kappa_1 A_1 A_2$	$\kappa_2 A_1 A_2$	$\kappa_{12} A_1 A_2$	$\kappa_{21} A_1 A_2$	NO HAY	NO HAY		GLG*
$\Sigma F_i, \Sigma M_i = 0$														Deformaciones

Leyenda:
 GLG* → Grados de libertad geométricos; GLE* → Grados de libertad estáticos
 E → Entrada; S → Salida

2.3 Investigaciones del estado tenso-deformacional de los suelos bajo cimentaciones laminares de revolución por el Método de Elementos Finitos (MEF)

En la primera década del siglo XXI en Cuba se han realizado investigaciones en modelos basados en el Método de Elementos Finitos (SIGMA/W, PLAXIS,

2.3 Research of stress-strain state of soils under revolutionary shells foundation for Finite Element Method (MEF)

In the first decade of XXI century Cuba has done research on models based on Finite Element Method (SIGMA / W, PLAXIS,

ABAQUS) sobre el comportamiento de cimientos laminares de revolución (de directriz recta y parabólica) (Figura 6) y de los suelos bajo cimentaciones laminares con carga axial-simétrica (Cobelo, 2004; González, 2010) para la determinación de distribución de presiones de contacto, asentos, capacidad soportante de suelos y sollicitaciones en la estructura, considerando la interacción suelo-lámina. Estos trabajos se desarrollan en tres etapas de investigación como alternativas de cimentación para chimeneas cortas de 74,5m de altura, estructura típica en los centrales azucareros cubanos.

ABAQUS) on the behavior revolution shells foundations (straight and parabolic guideline) (Figure 6) and foundation soils under laminar axial-symmetric load (Cobelo, 2004, Gonzalez, 2010) for the determination of the contact pressure distribution, seating, supportive capacity of soils and solicitations in the structure, considering the soil-blade interaction. This work was carried out in three stages of research as an alternative foundation for short stacks of 74.5 m in height, typical Cuban structure for sugar mills.

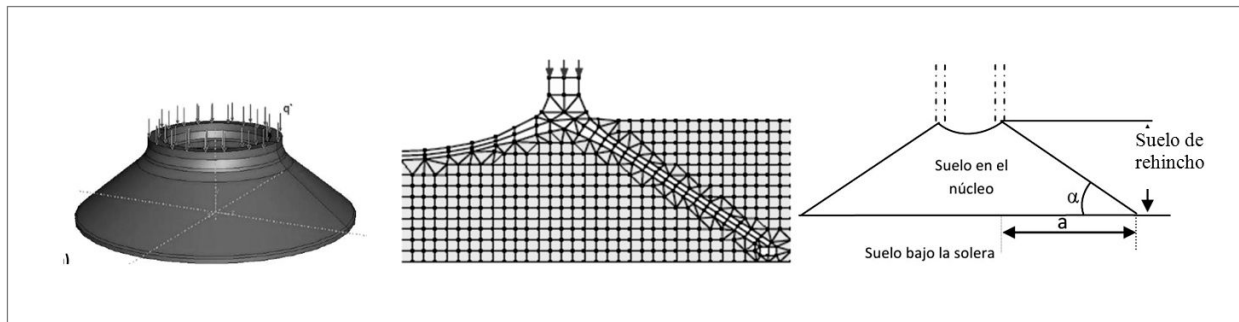


Figura 6. Características generales de la modelación de la cimentación por el MEF
Figure 6. General characteristics of foundation modeling by MEF

Los estudios para estas chimeneas se realizaron sobre una cimentación geotécnicamente diseñada de 16m de diámetro, conformada por dos láminas: una cúpula invertida de 8m en el fondo del fuste, que trabaja totalmente a compresión, y una lámina tronco-cónica empotrada en el fuste y libre en el borde exterior del cimiento. La lámina tronco-cónica en todos los casos fue dividida en 10 secciones transversales con 3, 5 y 9 puntos definidos sobre cada sección, con las que se evaluaron las sollicitaciones radiales (N_r) y circunferenciales (N_θ) en la superficie media. Al hormigón estructural se le atribuyó un modelo de comportamiento lineal-elástico, con $E=2,16 \times 10^7 \text{ kPa}$ y Coeficiente de Poisson $\mu=0,176$.

En la primera etapa (Cobelo, 2004) se desarrolló un experimento 3^2 con permutaciones de suelos en el núcleo, bajo el nivel de solera y suelo de rehinchio; valores del ángulo de fricción interna ϕ' ($\phi'_1=20^\circ$, $\phi'_2=30^\circ$ y $\phi'_3=40^\circ$) y Módulos de Elasticidad ($E_{01}=7260 \text{ kPa}$, $E_{02}=11000 \text{ kPa}$ y $E_{03}=30000 \text{ kPa}$), con tres geometrías cónicas, constructivamente competitivas y diferenciadas por el ángulo (α) de inclinación de la directriz respecto al plano de la base ($26,5^\circ$, 35° y 45°) y una relación f/a ($0,5$; $0,7$ y $1,0$), que determinó 27 experimentos numéricos,

The studies for these fireplaces were done on a foundation geotechnically designed of 16m diameter composed of two layers: an inverted dome 8m at the bottom of shaft, which works entirely in compression, and a truncated cone plate embedded in the shaft and free at the outer edge of the foundation. The truncated cone sheet in all cases was divided into 10 cross sections 3, 5 and 9 points defined on each section with which were evaluated the handle radial (N_r) and circumferential (N_θ) in the middle surface. When structural concrete was given a behavioral model linear-elastic, with $E=2,16 \times 10^7 \text{ kPa}$ and Poisson Coefficient $\mu=0,176$.

In the first stage (Cobelo, 2004) it was developed an experiment 3^2 with permutations of soils in the core, below the floor slab; value of the angle of internal friction ϕ' ($\phi'_1=20^\circ$, $\phi'_2=30^\circ$ y $\phi'_3=40^\circ$) and Elasticity Moduls ($E_{01}=7260 \text{ kPa}$, $E_{02}=11000 \text{ kPa}$ y $E_{03}=30000 \text{ kPa}$), with three conical geometries, constructively competitive and differentiated by the angle (α) of the guideline inclination in reference to the base plane ($26,5^\circ$, 35° y 45°) and a relation f/a ($0,5$; $0,7$ y $1,0$), determining 27 numeric experiments,

realizados mediante el Software SIGMA/W del GeoSlope v5.13, repetidos para modelos elásticos y elasto plásticos (Tipo Mohr-Coulomb) de comportamiento del suelo, hasta un total de 54 casos estudiados.

En la segunda etapa (González, 2010) se planteó otro experimento numérico donde se consideraron los 45 casos homogéneos de suelos en el núcleo, bajo el nivel de solera y suelo de rehincho para los mismos valores de ángulo de fricción interna ϕ' y Módulo de Elasticidad de los suelos E_{0i} para las tres geometrías tronco cónicas anteriores y dos nuevas geometrías parabólicas de curvatura Gaussiana negativa (la más desfavorable) con el empleo del PLAXIS 2D v8.2, para confrontarlos con los resultados de la primera etapa.

En la tercera etapa, aún en ejecución, se realizan nuevos experimentos numéricos para todas las permutaciones de suelos en el núcleo, bajo el nivel de solera y en el rehincho, con modelos de comportamiento elástico y elasto-plástico de este, mediante el empleo del programa ABAQUS sobre láminas de revolución de doble curvatura y de curvatura Gaussiana positiva, incrementando el número de nodos sobre cada sección transversal de la lámina, los que se confrontan con los resultados de las soluciones inversas en Coordenadas Relativas y Teoría de la Flexión tipo Love-Kirchhoff mediante la aplicación del método de Diferencias Finitas.

En lo referido a las sollicitaciones radiales (N_r) y circunferenciales (N_ϕ) en la superficie media de la lámina (Figura 7) los resultados de las dos primeras etapas muestran que la influencia de un tipo u otro de suelo friccional y su disposición en una u otra de las zonas identificadas tiene menor significación, para una misma geometría, que el modelo elástico o elasto-plástico de comportamiento físico-constitutivo que se asuma, y que esa influencia es menor incluso en la medida en que la lámina aumenta la relación f/a . Los dos primeros gráficos de N_r y N_ϕ que aparecen en la parte superior de la Figura 7 para $f/a = 0,5$ ($26,5^\circ$) corresponden a comportamiento lineal-elástico del suelo, los dos siguientes a comportamiento elasto-plástico tipo Mohr-Coulomb para la misma geometría, y los dos últimos al mismo modelo lineal-elástico para $f/a = 1$ (45°). En cada gráfico aparecen las variaciones de N_r y N_ϕ para las 9 combinaciones de suelos estudiadas, que confirman su comportamiento característico en estos casos.

done with GeoSlope v5.13 SIGMA/W Software, repeated for elastic and elasto-plastic models (Mohr-Coulomb Type) of soil behavior, up to a total of 54 studied cases.

In the second stage (González, 2010) another numerical experiment was raised where 45 cases were considered of homogeneous soils in the core, below the floor slab for the same values of friction angle ϕ' and Module elasticity of soils E_{0i} for the three previous conical trunk geometries and two new parabolic geometries of negative Gaussian curvature (the worst) with the use of Plaxis 2D v8.2, to confront them with the results of the first stage.

In the third stage, still running, new numerical experiments are performed for all permutations of soils in the core, below the floor slab level with models of elastic and elasto-plastic behavior, using ABAQUS program on sheets of revolution of double curvature of positive Gaussian curvature, increasing the number of nodes on each cross section of the sheet, which are compared with the results of inverse solutions in Relative Coordinates and Theory of Flexion Love-Kirchhoff type by the application of Finite Differences method.

In reference to radial sollicitations (N_r) and circumferential (N_ϕ) in the average surface of the sheet (Figure 7) the results of the first two steps show that the influence of a type or another of frictional soil and its disposition in one or another of the identified zones has less significance, for the same geometry, than the elastic or elasto-plastic model of physical constitutive behavior assumed, and that such influence is even minor in the measure that the sheet augments its relation f/a . The first two graphs N_r y N_ϕ appearing at the top of Figure 7 for $f/a = 0,5$ ($26,5^\circ$) correspond to a linear-elastic behavior of the soil, the next two ones to an elasto-plastic behavior of Mohr-Coulomb type for the same geometry, and the two last ones to the same lineal-elastic model for $f/a = 1$ (45°). In each graph are shown the variations of N_r y N_ϕ for the studied 9 combinations of soils, confirming its characteristic behavior in these cases.



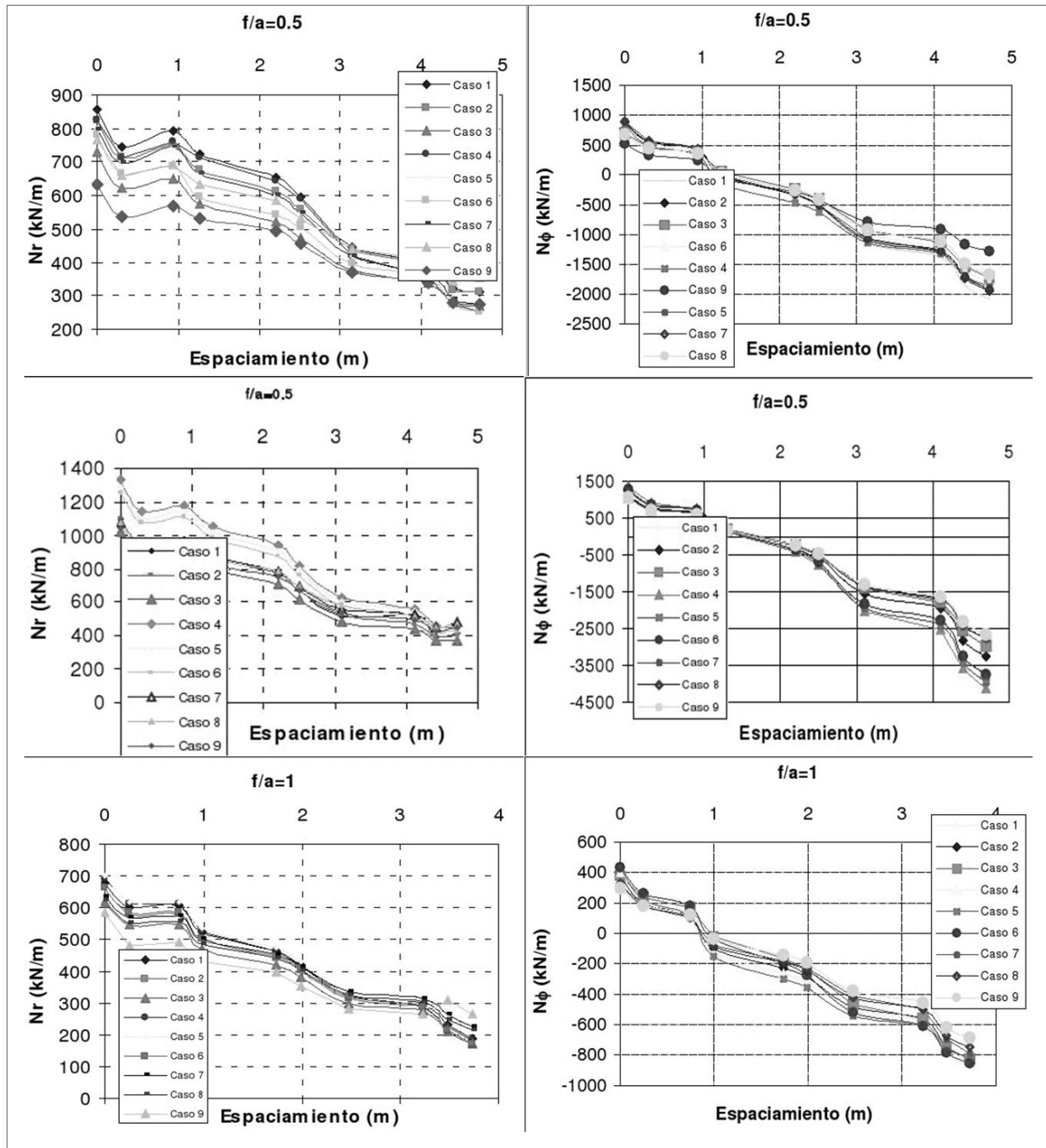


Figura 7. Gráficos de N_r y N_ϕ para diferentes relaciones de f/a y modelos de suelos

Figure 7. Graphs for N_r and N_ϕ for different f/a relations and soil models

Los resultados obtenidos mediante la modelación computacional con aplicación del M.E.F. que consideran la interacción suelo-estructura, permitieron introducir "factores de corrección a las solicitaciones membranales" F_c^r y F_c^p y el Efecto de Alteración Simple.

Las distribuciones de tensiones verticales (σ_y) a nivel de solera, se correspondieron en todos los casos con los ensayos físicos de Szechy (1965), Nicholls e Izadi (1968) y Kurian (1983), ratificando que existe concentración de tensiones verticales hacia los bordes de los cimientos laminares cónicos y una redistribución plástica beneficiosa en la zona central (Figura 8).

Los desplazamientos verticales (s_y) en la solera de los cimientos mostraron que el suelo confinado del núcleo no es incompresible y absorbe deformaciones verticales en parte del área de la solera, siendo estas más pronunciadas hacia el borde exterior, donde se aprecian zonas de plasticidad contenida en la vecindad del extremo de la lámina o el anillo de borde (Figura 9).

The results obtained by computer modeling with application of MEF considering soil-structure interaction, allowed to enter "correction factors to the membrane solicitations" F_c^r and F_c^p and the Effect of Simple Alteration.

The vertical stress distributions (σ_y) at the sill, corresponded in all cases to Szechy physical tests (1965), Nicholls and Izadi (1968) and Kurian (1983), confirming that there is vertical stress concentration towards the layered conical edges of the foundation and a plastic redistribution beneficial for the central area (Figure 8).

Vertical displacements (s_y) on the foundation sill showed that the soil confined core is not incompressible and absorbs vertical deformation in part of the sill area, this being more pronounced toward the outer edge, where there are areas of contained plasticity near the end of the rolled edge ring (Figure 9).

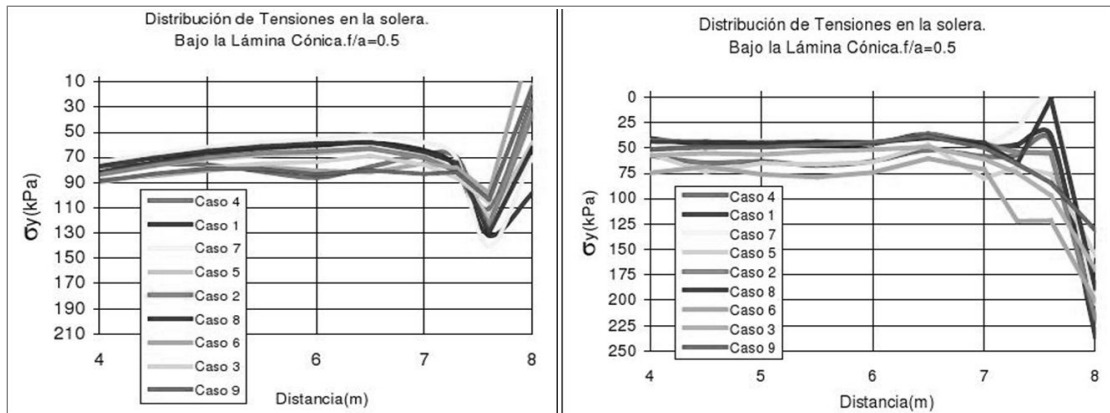


Figura 8. Distribución de tensiones en la solera para suelo elástico y elasto-plástico en $f/a = 0,5$

Figure 8. Curb stress distributions for elastic soil and elastic-plastic soil in $f/a = 0.5$

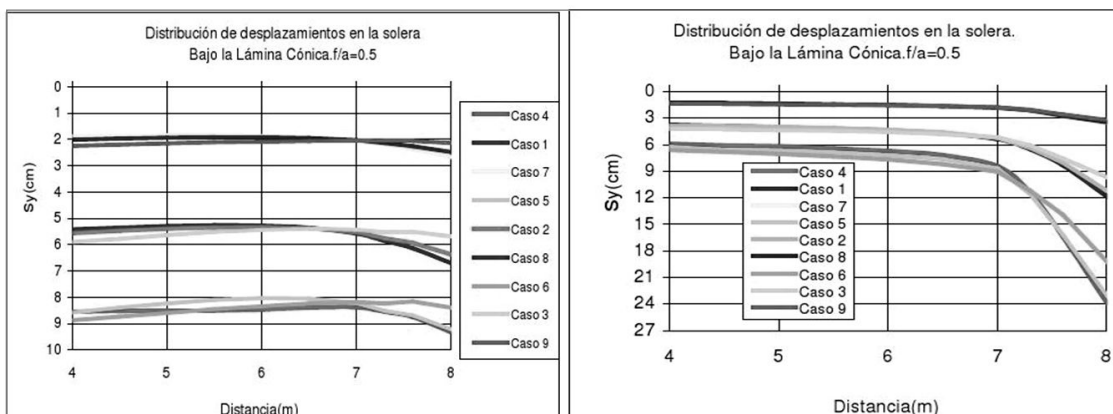


Figura 9. Distribución de asientos (s_y) en la solera para suelo elástico y elasto-plástico en $f/a = 0,5$

Figure 9. Curb foundation distribution (s_y) for elastic soil and elastic-plastic soil in $f/a = 0.5$

Los estudios de capacidad de carga q_u , de los suelos bajo los cimientos laminares analizados demuestran que en los mismos se alcanzan valores hasta 40% superiores a los de la ecuación de capacidad de carga de Terzaghi, 34% superiores a los determinados según el criterio de Hansen, y hasta un 20% sobre los calculados según el criterio de Meyerhof, en función del ángulo de inclinación de la directriz y de los tipos de suelo presentes en el núcleo, el relleno y la base. En la Tabla 2 se muestran los resultados de capacidad de carga q_u obtenidos por M.E.F. para la variante geométrica $f/a=0,7$ en comparación con los métodos analíticos de Terzaghi, Hansen y Meyerhof, en función del ángulo de fricción del suelo.

Así, y de forma similar a otros investigadores (Rahman, 1987), fue estimado un factor de corrección F_q que modifica el coeficiente N_q calculado según Reissner (1924) [Braja (2000), Norma Cubana para el Diseño Geotécnico de Cimentaciones Superficiales (2007)] y que compatibiliza los valores de la capacidad de carga de los cimientos tronco-cónicos con los determinados para cimiento laminar corrido de sección triangular (Hanna y Rahman, 1990), con una nueva corrección por el efecto de la interacción suelo-lámina. Además, se establecieron coeficientes de forma S_s que, incorporados a la ecuación de capacidad de carga de Terzaghi (con coeficientes de capacidad de carga corregidos por el factor F_q), toman en consideración la influencia de la forma del cimiento en el incremento de q_u (Tabla 3).

Studies of q_u load capacity of the soil under the shell foundation analyzed show that these values can be achieved up to 40% higher than load capacity Terzaghi's equation, 34% higher than those determined by Hansen's criteria, and up to 20% calculated on Meyerhof's criteria, depending on the angle of inclination of the guideline and soil types present in the nucleus, the filler and the base. Table 2 shows the q_u load capacity results obtained by FEM for geometric variation $f/a=0,7$ in comparison with Terzaghi, Hansen and Meyerhof analytic methods, depending on the soil friction angle.

Thus, and similar to other researchers (Rahman, 1987) was estimated a correction factor F_q that modifies the coefficient N_q calculated by Reissner (1924) [Bracha (2000), Cuban Standard for Geotechnical Design of Superficial Foundations (2007)] reconciles the values of the capacity of frustoconical foundations with those determined for displaced shell foundation of triangular section (Hanna y Rahman, 1990), with a new correction for the effect of soil-shell. In addition, S_s established form factors that added to the equation of Terzaghi load capacity (with load capacity coefficients corrected by the factor F_q), taking into account the influence of the shape of the foundation in the increase of q_u (Table 3).

Tabla 2. Resultados de capacidad de carga q_u en modelo de MEF y métodos analíticos en $f/a = 0,7$
 Table 2. Results of loading capacity q_u in MEF model and analytical methods in $f/a = 0.7$

$\Phi(^{\circ})$	M.E.F $q_u(kN/m^2)$	Terzaghi $q_u(kN/m^2)$	% Dif.	Hansen $q_u(kN/m^2)$	% Dif.	Meyerhof $q_u(kN/m^2)$	% Dif.
20	1329.00	810.0	+39	946.80	+28	1058.0	20
25	2406.00	1589.3	+34	1882.60	+21	2245.8	7
30	5282	3229.0	+39	3805.10	+28	4884.7	8
35	12125	6928.0	+43	7967.80	+34	11375.6	6
40	26688	16108.0	+40	17656.60	+34	28860.7	-8

Tabla 3. Coeficientes de forma corregido S_s para la capacidad de carga bajo láminas tronco-cónica
 Table 3. Amended shape coefficient S_s for loading capacity under trunk-conical plates

S_s	f/a			
	$\phi(^{\circ})$	0.5	0.7	1
20	1.11	1.13	1.16	
30	1.03	1.06	1.08	
40	1.10	1.14	1.20	

$$q_u = \left(\frac{1}{2} \gamma B N_{\gamma t} + q^* N_{qt} + C N_{ct} \right) S_s$$



En la segunda etapa de las investigaciones se utilizó una "interfase", con un comportamiento elasto-plástico tipo Mohr-Coulomb, afectado por un coeficiente $R_{inter}=0,666$ [Ibañez (2000) y Cobelo (2004)], en toda la superficie de contacto entre el suelo y la lámina de cimentación. Con base en las experiencias de otros investigadores [Huat & Mohamed (2006) y Esmaili & Hataf (2008)] y el empleo del PLAXIS 2D, (González, 2010) se modificaron y ampliaron los modelos precedentes, aprovechando las ventajas de esta herramienta: generador automático de mallas no estructuradas y salida de datos particular de la relación carga-deformación en un proceso de ensayo virtual de capacidad de carga a través de la opción de cálculo "c- ϕ' reduction", que permitió establecer otro criterio gráfico para la determinación de la capacidad de carga última. Los resultados del cálculo según este último criterio se exponen gráficamente (Figura 10) para cada profundidad de cimentación D_f , y se incluyen las curvas de q_u según los criterios de Terzaghi y Hansen [Braja (2000), Norma Cubana para el Diseño Geotécnico de Cimentaciones Superficiales (2007)] para cimientos circulares planos de igual área de la base, junto a la obtenida, en la primera etapa, para la lámina tronco-cónica de directriz recta $f/a = 07$.

Las investigaciones previstas en la tercera etapa, con el programa ABAQUS y el empleo de métodos semi-inversos en Coordenadas Relativas, Teoría de la flexión y Diferencias Finitas, prevé introducir el efecto de la Fuerza Horizontal y la excentricidad de la carga vertical en la modelación computacional de estas cimentaciones laminares en chimeneas cortas.

In the second stage of the investigations it was used an "interface" with an elasto-plastic Mohr-Coulomb type behavior, affected by a $R_{inter} = 0.666$ coefficient [Ibañez (2000) and Cobelo (2004)], over all the contact surface between soil and foundation plate. Based on the experiences of other researchers [Huat & Mohamed (2006) and Esmaili & Hataf (2008)] and the use of Plaxis 2D (Gonzalez, 2010) were modified and expanded the previous models, taking advantage of this tool: automatic generator and unstructured meshes and particular data output of the load-deformation relation in a virtual trial-load capacity through the calculation option "c- ϕ' reduction" which established other graph criteria for the determination of ultimate load capacity. The results of calculation according to this criterion are presented graphically (Figure 10) for each depth of foundation D_f , and q_u curves are included according to Terzaghi and Hansen criteria [Braja (2000), Cuban Standard for Geotechnical Design of Superficial Foundations (2007)] for foundations of flat circular equal base area, as the one obtained in the first stage for the truncated cone sheet of straight guideline $f/a = 07$.

The research planned in the third stage, with the ABAQUS program and the use of semi-inverse methods in Relative Coordinates, Theory of Finite Differences and Flexion, plans to introduce the effect of the Horizontal Force and the eccentricity of the vertical load on computational modeling shell foundations of these short stacks.

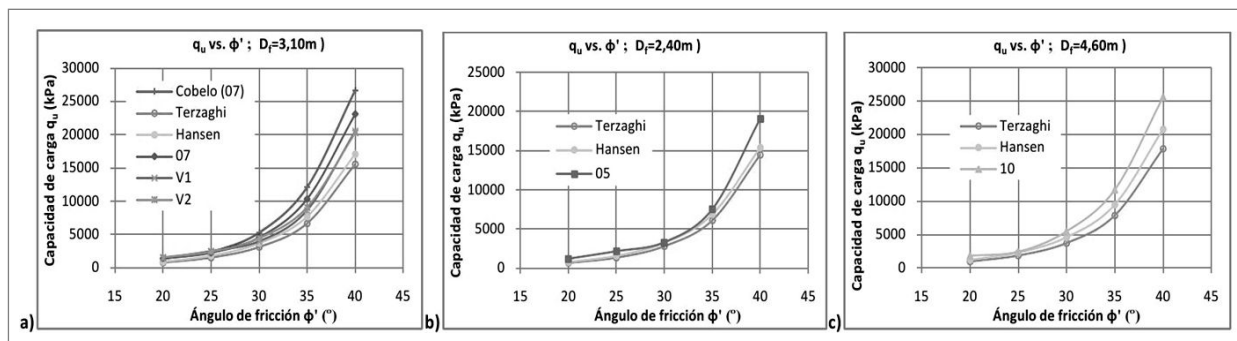


Figura 10. Resultados de capacidad de carga q_u para diferentes D_f , según método "c- ϕ' reduction"
Figure 10. Results of loading capacity q_u for different D_f , according to "c- ϕ' reduction" method

3. Conclusiones

Las cimentaciones laminares del último medio siglo han enriquecido el patrimonio construido en Cuba y la cultura profesional de la ingeniería en el país en cuanto al desarrollo de nuevos métodos de cálculo e investigaciones asociadas, como parte de un proceso general de alcance global. Entre las conclusiones de este período se destacan tres aspectos:

- El buen comportamiento estructural de las cimentaciones laminares de los depósitos elevados construidos en Cuba en la década de los años 60 del pasado siglo se corresponde con los resultados beneficiosos que desde el punto de vista de distribución de presiones, asentamientos en el nivel de solera y capacidad de carga muestran las investigaciones más recientes en estructuras tipo torre (chimeneas cortas) con los modelos geotécnicos y computacionales basados en la aplicación del Método de Elementos Finitos (M.E.F.). Las distribuciones de tensiones y asentamientos en solera obtenidos por este método demuestran que el suelo confinado en el interior de la cáscara es sensiblemente deformable, tal y como planteaban las hipótesis de diseño de aquella época, pues absorbe una parte de estas tensiones y redistribuye mejor los esfuerzos y deformaciones con relación a un cimiento circular de base rígida.
- En el intervalo de geometrías analizadas (directrices entre $\alpha=26,5^\circ$ ($f/a=0,5$) y $\alpha=45^\circ$ ($f/a=1,0$)), constructivamente aceptable para este tipo de cáscaras, los resultados alcanzados sobre las desviaciones en las propiedades físico constitutivas de suelos friccionales ($c = 0$), corroboran que estas variaciones no introducen diferencias significativas, para fines de ingeniería, en los valores de las sollicitaciones N_r y N_ϕ en función del ángulo de fricción interna del suelo. Además, estos resultados muestran que pequeñas variaciones en la directriz de la lámina por la tecnología constructiva empleada (in situ o prefabricada) no introducen tampoco grandes afectaciones en las sollicitaciones interiores de la misma, mientras que el grado de compactación de los suelos dentro de la lámina y sobre el nivel de solera, que son variables que controla el ingeniero durante la ejecución de la obra, pueden tener una mayor significación en la distribución de tensiones y los asentamientos en el nivel de cimentación.

3. Conclutions

The past half century shell foundations enriched the built heritage in Cuba and the engineering professional culture of the country, developing new methods of calculation and research partners, as part of an overall global reach process. Among the conclusions of this period there are three main aspects:

- The good structural behavior of shell foundations of elevated tanks built in Cuba in the early 60's of last century coincides with the beneficial results from the point of view of pressure distribution, settlements in the hearth and ability load level as more recent research show in tower-like structures (short chimneys) with geotechnical and computational models based on the application of the Finite Elements Method (FEM). The distributions of stresses and hearth settlements obtained by this method show that the soil contained within the shell is considerably deformable, as posed by the design assumptions of that time, because it absorbs some of these tensions and redistributes better stresses and strains with respect to a circular rigid base foundation.
- In the range of geometries analyzed (guidelines to $\alpha=26,5^\circ$ ($f/a=0,5$) and $\alpha=45^\circ$ ($f/a=1,0$)), constructively acceptable for this type of shells, the results on the deviations in the physical properties of soil constitutive frictional ($c = 0$), confirm that these variations do not introduce significant differences, for engineering purposes, on the value of the sollicitations N_r y N_ϕ depending on the angle of internal friction of soil. Furthermore, these results show that small variations in the shell guideline in the construction technology used (in situ or precast) do not introduce large modifications in the internal sollicitations of it, while the degree of compaction of soils within the shell and over the hearth level, which are variables that control the engineer during the execution of the work, may have greater significance in the stress distribution and settlement of the foundation level.

- El desarrollo de modelos y métodos de cálculo de láminas y cáscaras basados en el método de las Coordenadas Relativas, unido a las potencialidades de los métodos numéricos y su aplicación computacional (Método de las Diferencias Finitas, MEF, etc.) muestra cada día menos barreras, para que los ingenieros proyecten y construyan competitivas cimentaciones laminares, incluso considerandomodelos de suelos más complejos en su representación físico-matemática, pero mucho más cercanos a la realidad y evaluación experimental de sus diferencias específicas (Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, etc.).
- The development of models and methods of calculation sheets and shells based on the method of Relative Coordinates, together with the potential of numerical methods and computer application (Finite Differences Method, FEM, etc..) shows each day less barriers for engineers to design and build competitive shell foundations, even considering more complex models of soils in its physical-mathematical representation, but which are much closer to reality and experimental evaluation of their specific differences (Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, etc.).

4. Referencias / References

- Castañeda Hevia A. E. (1981-a), Corrimientos membranales. Otro enfoque. Ingeniería Civil, Vol. XXXII. N° 1-2, enero-abril, La Habana, Cuba.
- Castañeda Hevia A. E. (1981-b), Algoritmo para el cálculo de un Cimiento Laminar de revolución y directriz recta. Ingeniería Civil, Vol. XXXII. N° 3-4, mayo-agosto, La Habana, Cuba.
- Castañeda Hevia A. E. (1982-a), Método de cálculo de cáscaras en coordenadas relativas con deformaciones proyectadas. Tesis de Candidato a Doctor en Ciencias Técnicas, Instituto de Ingeniería de la Construcción de Moscú. (En ruso)
- Castañeda Hevia A. E. (1982-b), Teoría membranal de las cáscaras en coordenadas relativas con deformaciones proyectadas." Ingeniería Civil, Vol. XXXIII, No 5. La Habana, Cuba.
- Castañeda Hevia A. E. (1983-a), Teoría general de las cáscaras elásticas en coordenadas relativas con deformaciones proyectadas. (1ra parte), Ingeniería Civil, Vol. XXXIV, N° 1, enero-febrero, La Habana. Cuba.
- Castañeda Hevia A. E. (1983-b), Teoría general de las Cáscaras elásticas en coordenadas relativas con deformaciones proyectadas. (2da parte), Ingeniería Civil, Vol. XXXIV, N° 2, marzo-abril, La Habana. Cuba.
- Castañeda Hevia A. E. (1983-c), Condiciones de borde de las ecuaciones generales de las cáscaras en Coordenadas Relativas, Ingeniería Estructural. Vol. IV. N° 3. La Habana. Cuba.
- Castañeda Hevia A. E. (1984-a), Unificación de las coordenadas relativas con los métodos tradicionales de análisis de las Cáscaras. Ingeniería Estructural. Vol. V. N° 1, enero-abril. La Habana. Cuba.
- Castañeda Hevia A. E. (1984-b), Primera aproximación hacia una teoría de modelos, de formas cambiantes. Ingeniería Estructural. Vol. V. N° 2, mayo-agosto. La Habana. Cuba.
- Castañeda Hevia A. E. (1985), Análisis de la analogía estático-geométrica de la teoría de las tensiones y las deformaciones. Tesis de Doctor en Ciencias Técnicas, Instituto de Ingeniería de la Construcción de Moscú, URSS. (En ruso).
- Castañeda Hevia A. E. (1993), Inversión de operadores diferenciales y su aplicación a los problemas de la mecánica de los cuerpos deformables. Ingeniería Estructural y Vial, Vol. XIV, No 3. La Habana, Cuba.
- Castañeda Hevia A. E. (1995), Coordenadas relativas entre dos medios tridimensionales. Ingeniería Estructural y Vial, Vol. XVI, No 1, La Habana, Cuba.
- Cobelo Cristiá W. D. (1996), Solución de Cimiento Laminar de Revolución para Chimeneas Cortas. Tesis de Maestría en Estructuras, Departamento de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", La Habana, Cuba.
- Cobelo Cristiá W. D. (2004), Contribución al análisis estructural y al diseño geotécnico de cimentaciones tronco cónicas bajo carga axial-simétrica en estructuras tipo torre. Tesis de Doctor en Ciencias Técnicas. La Habana, Cuba.
- Cobelo Cristiá, W. D, Barry, L., Castañeda Hevia, A. E., Recarey Morfa C. A. (2004), Aplicación del M.E.F. en el estudio de capacidad de carga de un cimiento laminar. Ingeniería Civil, N° 134, CEDEX, España.
- Cobelo Cristiá W. D., Castañeda Hevia, A. E., Recarey Morfa C. A. (2004), Análisis de asentamiento de láminas como estructuras de cimentación. Ingeniería Civil, N° 135, CEDEX, España.
- Goldeneizer A. L. (1963), Teoría de los Cascarones Elásticos Delgados, Compañía Editorial Continental S. A. México.

- González Haramboure Y. (2010), Estudio comparativo de cimientos laminares bajo carga axialsimétrica para torres de chimenea de 74,5m en Cuba. Tesis de Maestría en Geotecnia, Departamento de Ingeniería Civil, Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", La Habana, Cuba.
- Hanna A.M. y Hadid W. (1987), New models of shallow foundations. *International Journal of Mathematical Modeling*, Vol. 9, N°11, pág. 799-811.
- Hernández Pérez J. E. y Rubiera J.R. (1968), Depósito elevado totalmente laminar. *Ingeniería Civil*, Volumen XVIII, No 12, Diciembre, Órgano Oficial del Colegio de Ingenieros Civiles. La Habana. Cuba.
- Hernández Pérez P. (1970), Unified Approach to the membrane Theory of Shells. *Tecnología, Serie 2: Ingeniería Civil*, No 11, Octubre, Universidad de la Habana, Cuba.
- Hernández Pérez P. (1972), Unified Approach to the membranes deformations of Shells. *Tecnología, Serie 2: Ingeniería Civil*, No 21, Diciembre, Universidad de la Habana, Cuba.
- Hernández Pérez P, Escalona F y Ronda A (1973-1975), Estructuras Laminares: Teoría y aplicaciones, *Ingeniería Civil*, No 4-1973; No 2-1974; No 5-1974; No 4-1975 y No 6-1975. Centro Técnico Superior de la Construcción. Instituto del Libro. La Habana. Cuba.
- Hernández P.J., Álvarez L. y Álvarez E. (2000), Calculo numérico de estructuras laminares de revolución utilizando el método de líneas y las EDAs, *Investigación Operacional*, Vol. 21, N° 1.
- Huat B.B.K. y Mohammed T.A. (2006), Finite Element Study Using FE Code (PLAXIS) on the Geotechnical Behavior of Shell Footings, *Journal of Computer Science*, ISSN 1549-3636, Vol. 2 N°1, pág. 104-108.
- Ibañez M. L. (2000), Algunas recomendaciones para la modelación de problemas tensión deformación en cimentaciones sobre pilotes. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño Estructural*, N°1626, Barcelona, España.
- Juarez B.E. y Rico R. A. (1968), *Mecánica de Suelos (T.I) UNAM*, México D.F. E.R. Instituto del Libro, La Habana, Cuba.
- Kurian N.P. y Mohan C.S (1981), Contact pressures under shell foundations. *Proceedings of the 10th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Stockholm, Sweden, Vol.2, pág. 165-168, 1981.
- Kurian N.P. (1994), Behavior of Shell Foundations under subsidence of core soil. *Proceedings of 13th International Conference of Soil Mechanics and Foundation Engineering*, New Delhi, India, pág.591-594.
- Kurian N.P y JayakrishnaDevaki V.M. (2001), Analysis of the Geotechnical Performance of Shell Foundations. *The New Millennium Conference*, New Delhi, India.
- Leonhardt F. (1967), The present position of reinforced concrete tower design. *Bulletin of the I.A.S.S.* No 29, march, Madrid. España.
- Paimuchin V. N. y Firsof V.A. (1975), Ecuaciones fundamentales de la teoría lineal de las cáscaras delgadas de formas complejas en coordenadas gaussianas de la superficie de cálculo, 6to Seminario de Teoría de cáscaras. Instituto Físico-Politécnico de Kazan (KFTP), Academia de Ciencias de la URSS, pp.7-20 (en ruso)
- Paimuchin V. N y Galimov N. K. (1977), Una teoría no lineal de cascaras de tres capas, tipo "sandwich", con espesores variables", 8vo Seminario de Estática y dinámica de cáscaras. Instituto Físico-Politécnico de Kazan (KFTP), Academia de Ciencias de la URSS. (en ruso).
- Paimuchin V. N. (1980), Una formulación de las ecuaciones básicas de la teoría de cascaras delgadas de forma compleja, rebajadas con respecto a la superficie de cálculo. *Investigaciones sobre teoría de placas y cascaras*, No 15, Kazan, pp. 70-77. (En ruso).
- Pücher A. (1934), *Über den Spannungs Zustand in dekrümmten Flächen*. *Beton und Eisen*.
- Rahman M.A. y Hanna A.M. (1990), Ultimate Bearing Capacity of Triangular Shell Strip Footings on Sand, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE Vol. 116, N°12, pág. 1851-1863.
- Rahman M.A. (1996), *Geotechnical Behavior of Shell Foundations*. Tesis de Doctorado, Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Concordia, Montreal, Canadá.
- Rianitsyn A. R. (1934), Dualidad de las ecuaciones estático-geométricas de la Mecánica de la Construcción. *Editorial de los Centros de Educación Superior, Arquitectura y Construcciones*, 1974, No 11, Moscú. (En ruso).
- Rühle H. (1967), Torres de TV y cimentaciones para torres" *Revista IASS*, No 31, septiembre. Madrid. España.
- Ruiz S. (1962), Placa poligonal para los cimientos en balsa de concreto armado de un edificio de 24 pisos. *Ingeniería Civil*, Volumen XIII, Número 10, Octubre de 1962, Órgano Oficial del Colegio de Ingenieros Civiles, pp: 565-572. La Habana. Cuba.
- Sharma K. A. (1973), Investigation of Spherical Shell Foundations. *The Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 99, No.SM6, junio.
- Szechy C (1965), Influence of shape of contact surface upon the bearing capacity and settlement of strip foundations. *Proceedings of the 5th Symposium of the Civil and Hydraulic Engineering*, Bangalore, India.
- Yamamoto K., Lyamin A.V., Abbo A.J., Sloan S.W., y Hira M. (2009), Bearing Capacity and Failure Mechanism of Different Types of Foundations on Sand, *Journal of Soil and Foundations*, Japanese Geotechnical Society, Vol. 49, N°2, pág. 305-314.