

Closed-form solutions for bearing capacity of footing on anisotropic cohesive soils

Soluciones de forma cerrada para la capacidad de carga de zapatas en suelos anisotrópicos cohesivos

Mosleh Ali Al-Shamrani*, Arif Ali Baig Moghal¹*

* Department of Civil Engineering, College of Engineering, King Saud University, Riyadh. ARABIA SAUDI

Fecha de Recepción: 17/06/2015

Fecha de Aceptación: 14/07/2015

PAG 109-125

Abstract

Simple closed-form solutions for the undrained bearing capacity of strip footings on anisotropic cohesive soils are derived employing kinematical approach of limit analysis. Both modified Hill-type and translational failure mechanisms, with variable wedge angles, are attempted and the best upper bound for each mechanism has been analytically determined leading to an analytical expression for the bearing capacity factor. The influence of degree of soil anisotropy on the corresponding value for the bearing capacity factor has also been evaluated. For a wide range of degree of anisotropy, the improvement in the predicted upper bound values does not warrant the use of the modified Hill-type mechanism. Instead, the conventional Hill-type failure mechanism, with a fixed wedge angle of $\pi/4$, provides a simple and concise analytical expression for the bearing capacity factor that is analytically equivalent to the conventional Prandtl - Reissner bearing capacity factor for the case of isotropic soil multiplied by the average of the sum of degree of anisotropy plus unity.

Keywords: Shallow footings, soil anisotropy, limit analysis, upper-bound method, failure mechanisms, closed-form solution

Resumen

Las soluciones de forma cerrada simples para la capacidad de carga no drenada de zapatas escalonadas en suelos isotrópicos cohesivos se derivan al emplear el enfoque cinemático del análisis de límites. Se intentan utilizar tanto el mecanismo traslacional de fallas como el mecanismo modificado tipo Hill, con ángulos de incidencia variables. Se ha determinado, de forma analítica, la mejor cota superior para cada mecanismo, lo cual nos lleva a una expresión analítica para el factor de capacidad de carga. También se ha evaluado la influencia del grado de anisotropía del suelo en el valor correspondiente para el factor de capacidad de carga. Para un amplio rango de grados de anisotropía, la mejora en los valores predichos de la cota superior no garantiza el uso del mecanismo modificado del tipo Hill. En vez de eso, el mecanismo convencional de falla del tipo Hill, con un ángulo de incidencia fijo de $\pi/4$, nos entrega una expresión simple y concisa para el factor de capacidad de carga que es analíticamente equivalente al factor convencional de capacidad de carga de Prandtl-Reissner, para el caso de suelos isotrópicos multiplicado por el promedio de la suma del grado de anisotropía más la unidad.

Palabras Clave: Zapatas someras, anisotropía del suelo, análisis de límites, método de cota superior, mecanismo de fallas, solución de forma cerrada

1. Introducción

Por lo general, la capacidad de carga final de las fundaciones se estima según el supuesto de que el suelo es isotrópico con respecto a la resistencia al corte. Sin embargo, los estratos de arcilla, por lo general, se depositan y se consolidan en condiciones unidimensionales, y por ende las arcillas naturales más recurrentes son, por lo general, anisotrópicas (Ward et al., 1965; Bishop, 1966). Esto da como resultado que los planos de estratificación horizontales tienen una fuerza y otras propiedades físicas distintas, en dirección horizontal y vertical. La anisotropía se atribuye, principalmente, al proceso de sedimentación seguido por consolidación unidimensional predominante que conlleva a una orientación preferente de las partículas de arcilla, las cuales tienden a orientarse de forma perpendicular a la tensión de consolidación mayor.

Debido a la anisotropía del suelo, la resistencia al corte no drenado varía con la orientación del plano de falla. En el problema de la capacidad de carga, la dirección del cizallamientos principales a lo largo de cualquier supuesta superficie de falla cambia de un punto a otro.

Por lo tanto, es más realista utilizar valores de fuerza apropiados para cada orientación del plano de falla. Esto es de suma importancia, en especial, en el caso de las soluciones analíticas, en donde la capacidad de carga no drenada es una mera función de un parámetro de suelo (es decir, la resistencia al corte no drenado), contrario a las soluciones computacionales en donde el comportamiento del suelo se caracteriza por varios parámetros constitutivos, aunque con distintos niveles de importancia.

Varias veces se ha intentado evaluar la capacidad de carga de zapatas en suelos cohesivos que tomaron en cuenta la anisotropía de resistencia al corte. Utilizando el enfoque del equilibrio de límites y suponiendo que existe una superficie de falla circular, Menzies (1976) presentó un factor de corrección para la influencia de la anisotropía del suelo en la capacidad de carga predicha. Empleando el método de equilibrio de límites, Reddy y Srinivasan (1967) adoptaron un mecanismo circular de falla para el análisis de capacidad de carga de zapatas sobre suelos con fuerza no-homogénea y anisotrópica. Los parámetros que describen la geometría del mecanismo eran diversos y los resultados se presentaron con cartas de diseño no dimensional. Adoptando el mismo mecanismo de falla circular, pero utilizando el enfoque de cota superior de análisis de límites, Chen (1975) presentó una solución que concordaba con la solución del método de límites de equilibrio obtenida con anterioridad por Reddy y Srinivasan (1967). Aun cuando el uso del mecanismo

¹ Autor de Correspondencia:

Profesor Asistente. Bugshan Research Chair in Expansive Soils, Department of Civil Engineering, College of Engineering, King Saud University, Riyadh – 11421
E-mail: shamrani@ksu.edu.sa



circular, al parecer, simplifica el análisis matemático, este modo de falla no nos entrega la mejor solución.

Davis y Christian (1971) presentaron una solución para la capacidad de carga de arcillas anisotrópicas, utilizando el método de la línea de corrimiento. Un coeficiente de corrección para el factor de capacidad de carga se presentó de forma gráfica, como una función de los parámetros de fuerza del suelo. Suponiendo un mecanismo de falla similar al mecanismo del tipo Prandtl, pero con ángulos de incidencia de límites variable, Reddy y Rao (1981) utilizaron el enfoque de cota superior de análisis de límites para la evaluación de capacidad de carga para las arcillas anisotrópicas y no homogéneas. Aun cuando la solución es rigurosa en relación con el concepto de análisis de límites, sin embargo la expresión derivada es bastante torpe y la cota superior mínima sólo se podría obtener de forma numérica, por medio de un proceso de ensayo y error (de forma heurística) o con la ayuda de optimización técnica rigurosa e iterativa.

Es evidente que, sin importar el método de análisis y el mecanismo de falla que se adopte, todas las soluciones disponibles para la capacidad de carga de zapatas en suelos anisotrópicos presentan resultados gráficos que relacionan la capacidad de carga final al suelo y a los parámetros de mecanismo de falla. La presentación de resultados para una variada gama de combinaciones útiles de todos los parámetros, por lo general, requiere el uso de una gran cantidad de diagramas. Más aún, una ventaja de la solución de forma cerrada es que describe, de forma clara, el efecto de anisotropía del suelo sobre la capacidad de carga en oposición a representaciones gráficos o tabulares, en donde dicho efecto queda obstruido en una serie de charts y/o tablas. Además, la utilización de gráficos y tablas en la práctica de diseño no es conveniente para efectos de cálculos computacionales. Por lo tanto, sería razonable señalar que, en parte, debido a la falta de una solución simple de forma cerrada; los cálculos de la capacidad de carga de zapata en los suelos anisotrópicos resulta ser, en alguna medida, un tema de investigación con menos aplicaciones prácticas.

Este paper nos muestra soluciones de forma cerrada para la capacidad de carga final de zapatas escalonadas localizadas en la superficie de arcillas anisotrópicas. Las soluciones se obtienen al utilizar el método de cota superior del análisis de límites (Drucker et al., 1952) y las expresiones para el factor de capacidad de carga se derivan del mecanismo traslacional de fallas del tipo Hill modificado. La fuerza en cualquier dirección en el plano vertical-horizontal se expresa con respecto a la fuerza en la dirección principal, de acuerdo con la relación funcional sugerida por Casagrande y Carillo (1944). Se demuestra el efecto de la anisotropía en la capacidad de carga y los resultados se comparan con las soluciones pertinentes disponibles.

2. Método de análisis

Con el advenimiento de poderosos computadores y con el desarrollo de métodos de computación modernos la capacidad de analizar problemas ha sobrepasado, por primera vez, nuestra capacidad de describir el material (Drucker, 1991). Sin embargo, a pesar del desarrollo de estos métodos computacionales que nos brindan una

solución a muchos de los complicados problemas que debemos resolver, aún sigue siendo de vital importancia el realizar simples cálculos analíticos para evaluar los resultados de dicho análisis numérico más o menos elaborado.

De forma tradicional, la línea de corrimiento, el equilibrio de límites y el método de análisis de límites son los métodos analíticos más utilizados que permiten resolver los problemas de estabilidad en la ingeniería geotécnica. Aun cuando el método de análisis de límites es una técnica relativamente nueva -si se compara con la línea de corrimiento y con el método de equilibrio de límites- se ha aplicado de forma amplia para la solución de problemas convencionales de estabilidad geotécnica, entre ellas la capacidad de carga de zapatas (Chen y Davidson, 1973; Florkiewicz, 1989; Michalowski, 1997; Ukritchon et al., 1998, Kumar y Kouzer, 2007; Kumar y Kouzer, 2008a; Kumar y Khatri, 2011) problemas de presión lateral en la tierra (Chen y Rosenfarb, 1973), estabilidad de taludes (Chen y Giger, 1971; Izbicki, 1981), y cortes verticales (Drescher, 1983; Su et al., 1998; Kumar y Kouzer, 2008b). La teoría nos entrega cotas superiores e inferiores que nos permiten acotar la carga límite de materiales plásticos totalmente rígidos y los cálculos de las dos cargas se conocen como el análisis de límites (Chen, 1975). Contrario al enfoque cinemático que se ha utilizado de forma tan exitosa, la cota inferior se ha aplicado con menos frecuencia a los problemas de la ingeniería geotécnica. Esto sucede porque es mucho más difícil construir un campo de tensión admisible desde el punto de vista estadístico que lo es construir un buen mecanismo de falla, admisible desde el punto de vista cinemático (Sloan, 1988).

El teorema de cota superior de análisis de límites sostiene que: para un material perfectamente plástico que tiene una regla de flujo asociado, el colapso debe ocurrir para todo mecanismo de falla admisible, desde el punto de vista cinemático si la razón de trabajo realizado por una serie de fuerzas externas en un aumento del desplazamiento es igual o superior a la razón de energía desplegada por cizallamientos internos (Chen, 1975). Un campo de tensión admisible desde el punto de vista cinemático es aquel que cumple con las ecuaciones de compatibilidad, la regla de flujo y las condiciones de velocidad circundantes. Durante el flujo plástico, la energía se disipa a través de la elasticidad plástica de la masa del suelo y por deslizamientos que ocurren a lo largo de discontinuidades de velocidad, en donde pueden haber saltos en las velocidades normal y tangencial.

2.1 Soluciones de cota superior para la capacidad de carga

El primer paso esencial en el enfoque de cota superior de análisis de límites es la postulación de un mecanismo de falla admisible, desde el punto de vista cinemático (también se le conoce como campo de velocidad) con respecto a los parámetros geométricos (por ejemplo radio de curvatura, ángulo de la superficie de corrimiento, etc.). Al comparar la razón de trabajo de fuerzas externas con la razón de disipación de energía interna se obtiene una expresión para la carga de colapso como función de las propiedades del material y la geometría del mecanismo de falla. Luego, los parámetros geométricos del mecanismo de falla se varían en un esquema de optimización, ya sea por medio de ensayo y



error o por medio de las matemáticas, con el objetivo de lograr la mínima energía disipada y, por ende, la mejor cota superior para ese mecanismo de falla particular. Se pueden investigar diversos tipos de mecanismos de colapso y la cota superior final que se obtiene de todos los mecanismos probados se considera la mejor cota superior de la carga límite verdadera.

En esta investigación se han probado varios de los, comúnmente llamados, mecanismos de falla admisible desde el punto de vista cinemático para el problema de la capacidad de carga. El objetivo era no sólo obtener la cota superior mínima posible con respecto a la capacidad de carga, sino que también cumplir con el primer objetivo de este paper, es decir obtener una expresión de forma cerrada para el factor de capacidad de carga. No estaba claro, a priori cuál mecanismo iba a predecir la menor capacidad de carga o aquel que pudiera conllevar una expresión de forma cerrada para el factor de capacidad de carga. Los dos mecanismos que aquí se presentan son un mecanismo tipo Hill modificado y un mecanismo traslacional.

2.2 Mecanismo modificado del tipo Hill

El primer mecanismo de falla que se considera es el que se muestra en la Figura 1a. Está compuesto por cuñas rígidas de triángulo ABC y AB'C' con ángulos base β y $\pi/2-\beta$; zonas de cizallamiento radial BCD y B'C'D' de un ángulo central $\alpha+\beta$; y cuñas triangulares pasivas de Rankine BDE y B'D'E' con ángulos base α y $\pi/2-\alpha$. El mecanismo que se muestra en la Figura 1a se asemeja al de Hill; sin embargo, los ángulos α y β no se dan a priori, pero están sujetos a cambios durante la investigación realizada para la carga de cota superior mínima. Para los suelos isotrópicos, se encuentra el mínimo cuando este mecanismo se vuelve idéntico al del mecanismo original del tipo Hill, para lo cual los ángulos α y β son iguales a un valor fijo de $\pi/4$. El mecanismo es simétrico respecto al eje de la zapata y por ende sólo se considera el lado derecho en las derivaciones subsecuentes.

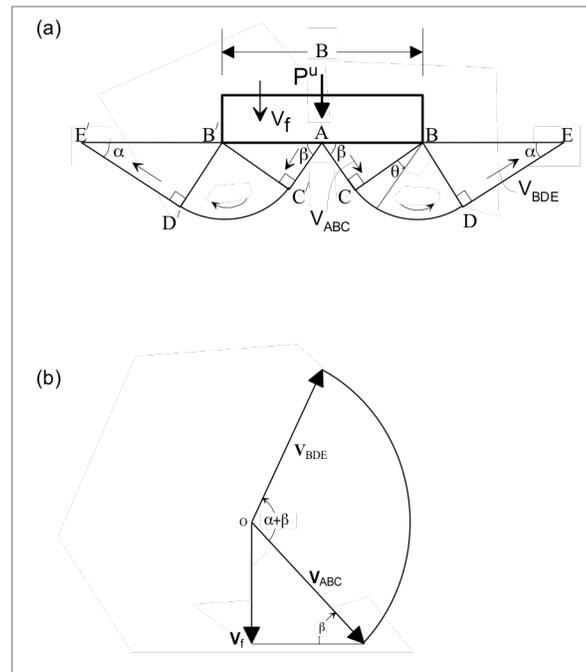


Figura 1. (a) Mecanismo de falla del tipo Hill modificado; (b) Velocidad de la hodógrafa



Dado que la velocidad para los triángulos rígidos ABC y BDE es, respectivamente, perpendicular a las líneas radiales BC y BD, el mecanismo queda del todo especificado por los dos ángulos α y β . La longitud de las discontinuidades AC, CD, y DE se puede expresar como las funciones del ancho de la zapata, B y de los ángulos α y β . El flujo plástico se confina a la zona por sobre la línea de superficie de falla A-C-D-E y el suelo por debajo de esta discontinuidad línea permanece en descanso. Se supone que la zapata es rígida y se mueve de forma descendente con la velocidad V_f . De este forma los movimientos del plano de contacto deben permanecer siempre planos. La cuña ABC se traduce en un descenso diagonal como un cuerpo rígido, paralelo a la línea de discontinuidad AC en el aún no definido ángulo β a la línea de fondo de la zapata. El abanico BCD sufre una deformación continua, producto del cizallamiento y se cree que está compuesto por una secuencia de triángulos rígidos que se mueven como si fueran cuerpos rígidos en la dirección perpendicular a BD. La zona BDE es empujada de forma ascendente como un cuerpo rígido, con una velocidad igual a la velocidad perpendicular a la línea radial BD y con la línea DE contenida para ser tangente a la curva CD en el punto D.

Para evaluar la disipación de energía se necesita conocer las velocidades de desplazamiento relativas entre los bloques adyacentes. Debido a la falta de conocimiento de las arcillas que se encuentran por debajo de la carga no drenada, en mecanismos de bloques rígidos, en donde toda la deformación ocurre a lo largo de las interfaces entre los bloques, el salto de velocidad entre los dos bloques es paralelo a la superficie de corrimiento. Para el mecanismo de fallas compuesto de distintas líneas de ruptura, el método más directo y conveniente es a través del uso de un diagrama de velocidad. Este campo de velocidad, también se le conoce como hodógrafa, que es una representación gráfica de los vectores de velocidad cuyas longitudes son proporcionales a las magnitudes de velocidad y sus direcciones son paralelas a las velocidades reales en el espacio físico.

La hodógrafa que registra las velocidades de bloques deslizantes en la Figura 1a es la que se muestra en la Figura 1b. Al utilizar las relaciones geométricas en el diagrama de velocidad que se muestra en la Figura 1b, las velocidades adecuadas para los bloques individuales sólo se logran determinar como funciones del movimiento descendente de la zapata, V_f y los ángulos α y β . Las velocidades de los bloques ABC y BDE son iguales en magnitud y las velocidades en la región BCD tienen la misma magnitud, con la dirección cambiante, de acuerdo con el radio que se deriva del punto B.

Debido a que se requiere de un movimiento relativo entre la zapata y el suelo, que se encuentra inmediatamente por debajo, se supone que la interface entre la cuña ABC y el fondo de la zapata conlleva lentamente a una razón de trabajo cero, a lo largo de la superficie AB. Más aún, debido la falta de compresibilidad del material Tresca durante el flujo plástico, el incipiente flujo descendente de la masa a lo largo del borde AB debe ser igual al flujo ascendente que cruza el borde BE, y de esta manera la tasa de trabajo neto del peso del suelo es igual a cero.

Se supone que el comportamiento del suelo se ajusta para cumplir con la regla de flujo asociativa, y por ende la tasa de disipación a lo largo de la superficie de corrimiento es simplemente igual al producto escalar de la resistencia al cizalle y la magnitud del vector de salto de la velocidad, o:

$$\delta W_n = C_{un} I_n V_n \quad (1)$$

en donde C_{un} , I_n , V_n , δW_n son la resistencia al corte no drenado, la longitud, la velocidad y la disipación incremental de energía, a lo largo de la superficie de corrimiento n , respectivamente.

En este estudio se supone que la fuerza en cualquier dirección en el plano vertical-horizontal se expresa con respecto a la fuerza en la dirección principal, de acuerdo con la relación funcional propuesta por Casagrande y Carillo (1944) tal que:

$$C_{ui} = C_{uh} + (C_{uv} - C_{uh}) \cos^2 i \quad (2)$$

En donde C_{uv} y C_{uh} son la resistencia al corte no drenado para la compresión en dirección vertical y horizontal, respectivamente; C_{ui} es la resistencia al corte, correspondiente a la inclinación i de la tensión principal máxima con dirección vertical. Deberían haber otras ecuaciones que han sido sugeridas por otros investigadores (Bishop, 1966; Menzies, 1976; Livneh y Komornik, 1967), sin embargo la Ecuación N° 2 ha sido la base para casi todo el trabajo subsecuente, a pesar del hecho de que se sugirió, al principio, una hipótesis de trabajo sin justificación experimental (Davis, 1971).

La Figura 2 muestra la variación direccional de resistencia al corte. Las resistencias C_{uv} y C_{uh} se denominan resistencias principales (Lo, 1965) y la razón C_{uh}/C_{uv} se indica por k y sugiere el grado de anisotropía no drenada (Menzies, 1976), coeficiente de anisotropía (Reddy y Srinivasan, 1967), índice de anisotropía (Livneh y Komornik, 1967), o grado de anisotropía (Lo, 1965). Se supone que el valor de k es el mismo en todos los puntos en el medio del suelo. Para suelos isotrópicos $C_{uv} = C_{uh}$, $k = 1$ y la curva trazada por C_{ui} en un plano vertical-horizontal se convierten en un círculo, tal como se muestra en la Figura 2b. Para los materiales anisotrópicos, el locus de C_{ui} puede asumir cualquier forma convexa que no sea un círculo. De acuerdo con la Ecuación N° 2, se supone que es una elipse, y en términos de k , la Ecuación N° 2 se puede escribir como:

$$C_{ui} = [k + (1 - k) \cos^2 i] C_{uv} \quad (3)$$

Lo (1965) ha informado de valores de k que van desde 0.6 a 1.3, con un valor de k que es mayor que 1 que se obtiene, en gran medida, en el caso de las arcillas sobre-consolidadas. Davis y Christian (1971) compilaron datos de una fuerza isotrópica importante registrada por diversos investigadores para los distintos depósitos de arcilla. La razón de la fuerza no drenada, en la dirección horizontal a su valor en la dirección vertical va del rango entre 0.75 hasta casi 1.56. Lee y Rowe (1989) señalaron que para una variedad de suelos, el valor de k fluctúa entre 0.77 a 1.27.



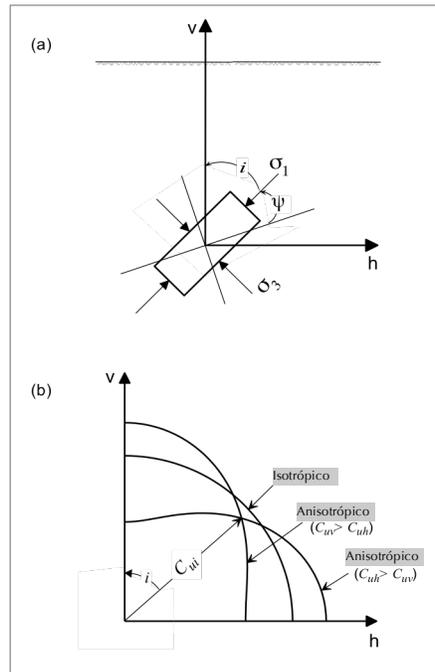


Figura 2. (a) Definición de fuerza variación con dirección de tensión principal máxima; (b) Variación de fuerza en el plano vertical-horizontal (After Lo, 1965)

De la Figura 1a, $L_{(AC)} = (B/2)\cos \beta$; que hace referencia a la Figura 1b, $V_{(AC)}=V_{ABC} = V_f / \text{sen } \beta$; y el valor de $C_{ui(AC)}$ se da por la Ecuación N° 3 con un ángulo $i_{(AC)}$ igual a $\pi/2-(\beta+\psi)$, en donde tal como se muestra en la Figura 2a, ψ es el ángulo entre el plano de la falla y el plano normal a la dirección de la tensión principal menor. Como consecuencia, la disipación de energía interna, a lo largo de la superficie de corrimiento AC se obtiene a partir de la Ecuación N° 1, como:

$$\delta W_{(AC)} = \frac{B \cot \beta}{4} [(1+k) - (1-k)\cos 2(\beta + \psi)] C_{uv} V_f \quad (4)$$

La longitud $L_{(DE)}$ proviene de la Figura 1a, igual a $(B/2)\text{sen } \beta / \tan \alpha$; de la Figura 1b $V_{(DE)} = V_{BDE} = V_f / \text{sen } \beta$, y $C_{ui(DE)}$ se da a partir de la Ecuación N° 3 con el ángulo $i_{(DE)}$ igual a $\pi/2-(\alpha-\psi)$. Substituyendo estos valores dentro de la Ecuación N° 1, lo cual nos da:

$$\delta W_{(DE)} = \frac{B \cot \alpha}{4} [(1+k) - (1-k)\cos 2(\alpha - \psi)] C_{uv} V_f \quad (5)$$

La razón de disipación de energía a lo largo de la curva de discontinuidad CD se calcula al multiplicar el área diferencial $rd\theta$ por la resistencia al corte no drenado C_{ui} dado a partir de la Ecuación N° 3, multiplicado por el vector de salto de velocidad que cruza la línea cuya magnitud es igual a $V_f / \text{sen } \beta$, y se integra por sobre toda la superficie, o:

$$\delta W_{(CD)} = \int_0^{\alpha+\beta} [k + (1-k)\cos^2 i_{(CD)}] C_{uv} (V_f / \text{sen } \beta) rd\theta \quad (6)$$

El radio del abanico de deslizamiento, $r = (B/2)\text{sen } \beta$, para cualquier punto en la superficie de la falla CD el ángulo de inclinación $i_{(CD)}$ es igual a $\pi/2-\beta+\theta-\psi$ substituyendo los valores para r y el ángulo $i_{(CD)}$ dentro de la Ecuación N° 6 y queda como:

$$\delta W_{(CD)} = \frac{B}{4} \left[(1+k)(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(1-k)(\sin 2(\theta - \alpha) - \sin 2(\beta + \psi)) \right] C_{uv} V_f \quad (7)$$

La razón de disipación de energía en la zona de cizallamiento radial BCD se da al multiplicar la longitud de la línea radial por la resistencia al corte no drenado, a lo largo de la línea, multiplicado por el vector de salto de velocidad a lo ancho de la línea, lo que es igual a $V_f / \text{sen } \beta$, y que se integra sobre el ángulo $\alpha+\beta$, o

$$\delta W_{(BCD)} = \int_0^{\alpha+\beta} C_{ui(BCD)} (V_f / \text{sen } \beta) rd\theta \quad (8)$$

Al substituir, dentro de la Ecuación N° 8, el valor de r y el de $C_{ui(BCD)}$ tal como se obtiene de la Ecuación N° 3 con $i_{(BCD)} = \beta-\theta-\psi$, da como resultado:

$$\delta W_{(BCD)} = \frac{B}{4} \left[(1+k)(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(1-k)(\sin 2(\alpha + \psi) + \sin 2(\beta - \psi)) \right] C_{uv} V_f \quad (9)$$

La razón de trabajo externo realizado por la carga de los cimientos P^u se da por:

$$\delta E = P^u V_f \quad (10)$$

Al combinar las Ecuaciones 4, 5, 7, y 9, y al multiplicar por dos para ambos lados del mecanismo, da como resultado las razones totales de disipación de energía



interna. Al equiparar la razón total de disipación de energía interna obtenida con la razón de trabajo externo, la cota superior para la carga de los cimientos, P^u , se expresa como

$$P^u = \frac{B}{2} \left[\frac{(1+k)(\cot\beta + \cot\alpha + 2(\alpha + \beta))}{-(1-k)\cos 2\psi(\cot\beta \cos 2\beta + \cot\alpha \cos 2\alpha)} \right] C_{uv} \quad (11)$$

Para lograr la cota superior mínima se necesita una minimización de P^u con respecto a los ángulos β y α , o

$$\frac{\partial P^u}{\partial \alpha} = 0 \quad (12a)$$

y

$$\frac{\partial P^u}{\partial \beta} = 0 \quad (12b)$$

A partir de las Ecuaciones 11 y 12, y luego de una simplificación y manipulación algebraica, tenemos que:

$$\sin 2\alpha \tan 2\alpha = \left[\frac{(1+k) - (1-k) \cos 2\psi}{(1-k) \cos 2\psi} \right] \quad (13a)$$

and

$$\sin 2\beta \tan 2\beta = \left[\frac{(1+k) - (1-k) \cos 2\psi}{(1-k) \cos 2\psi} \right] \quad (13b)$$

Resulta evidente, a partir de las Ecuaciones 13a y 13b que $\alpha = \beta$, y por ende en términos de β la Ecuación N° 11 se reduce a:

$$q^u = N_{cM}^a C_{uv} \quad (14)$$

En donde q^u es la capacidad de carga final; igual a la carga final P^u dividida por el área de la zapata y

N_{cM}^a es el factor anisotrópico de capacidad de carga asociado con el mecanismo modificado del tipo Hill (Figura 1a) y se da por:

$$N_{cM}^a = (1+k)(\cot\beta + 2\beta) - (1-k)\cos 2\psi \cot\beta \cos 2\beta \quad (15)$$

La evaluación de la capacidad de carga que surge de la Ecuación N° 14 requiere que primero se determine el ángulo β del mecanismo de falla de la Ecuación N° 13b. Esta es la única variable desconocida en la Ecuación N° 13b; pero no se puede resolver para que queda más explícita. Sin embargo, se puede determinar por medio de un proceso de ensayo y error y el valor determinado luego se ingresa a la Ecuación N° 15, para evaluación del factor N_{cM}^a que, a su vez, se sustituye dentro de la Ecuación N° 14 para que entregue el valor de capacidad de carga correspondiente.

Tal como sabemos, para el caso de fuerza isotrópica el valor óptimo para el ángulo β es 45° . Subsecuentemente se demostrará que para el rango común de valores para el grado de anisotropía, el valor óptimo para β es $\approx 45^\circ \pm 3^\circ$, y por ende el término $\sin 2\beta$ en la Ecuación N° 13b se puede establecer virtualmente como uno, y el valor de β se puede expresar de forma clara.

2.3 Mecanismo traslacional

El segundo mecanismo que se considera consiste, tal como se muestra en la Figura 3a, en bloques deslizantes separados por superficies de rotura plana interna. Se aproxima al mecanismo modificado del tipo Hill (Figura 1a), en donde el abanico de deslizamiento o región de zona de cizallamiento BCD en la Figura 1a se reemplaza por el bloque rígido BCD que aparece en la Figura 3a. Por lo tanto, no se produce una deformación dentro de la región BCD, y para todo el mecanismo, la energía sólo se disipa en las interfaces entre los bloques adyacentes, lo cual constituye discontinuidades de velocidad. Dado que el mecanismo es simétrico alrededor del eje de la zapata, sólo es necesario considerar el movimiento al lado derecho de la Figura 3a.

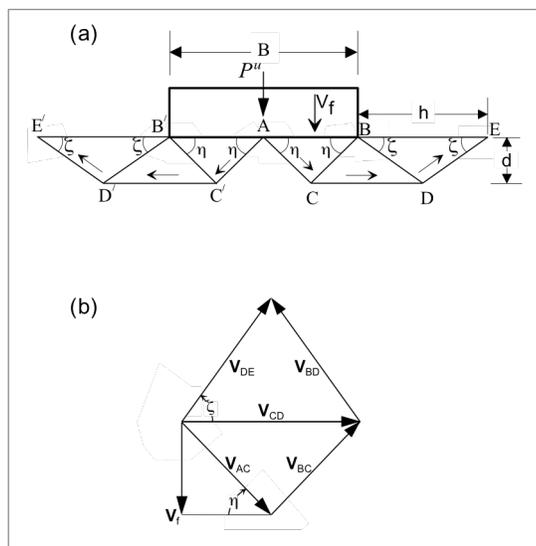


Figura 3. (a) Mecanismo traslacional de falla; (b) Hodógrafa de velocidad



Los bloques rígidos en el mecanismo se separan debido a las discontinuidades de velocidad AC, BC, CD, BD, y DE. La zapata se desplaza hacia abajo a una velocidad V_f , y las velocidades de los bloques particulares se pueden obtener a partir de las relaciones geométricas que registra la hodógrafa de la Figura 3b. La cuña ABC se traduce en un ángulo η con la horizontal. Este movimiento se acomoda gracias al movimiento lateral del bloque adyacente BCD el cual a su vez empuja hacia arriba la cuña BDE. Los dos triángulos BCD y BDE se mueven como cuerpos rígidos en dirección paralela a CD y DE, respectivamente.

De la Figura 3a, $L_{(AC)} = B/(4\cos \eta)$; según se muestra en la Figura 3b, $V_{(AC)} = V_f / \sin \eta$; y al substituir el valor de $C_{ui(AC)}$ se obtiene de la Ecuación N° 3 con $i_{(AC)} = \pi/2 - (\beta + \psi)$. De esta manera, la disipación de energía interna a lo largo del plano de corrimiento AC se obtiene de la Ecuación N° 1 como:

$$\delta W_{(AC)} = \frac{B}{8\cos\eta\sin\eta} [(1+k) - (1-k)\cos 2(\eta + \psi)] C_{uv} V_f \quad (16)$$

En vez de utilizar los ángulos η y ζ que se muestran en la Figura 3a y en la Figura 3b, se encontró que es más conveniente definir las longitudes de las discontinuidades y los incrementos de velocidad en relación con el ancho de la zapata, B, La profundidad del mecanismo, d, y la extensión lateral del mecanismo desde el borde de la zapata, h. Por lo tanto, con respecto a los parámetros d y h la Ecuación N° 16 deduce que:

$$\delta W_{(AC)} = \left(\frac{16d^2 + B^2}{32d} \right) [(1+k) - (1-k)\cos 2(\eta + \psi)] C_{uv} V_f \quad (17)$$

La longitud, el aumento de velocidad, y la resistencia al corte, a lo largo del plano de corrimiento BC son idénticos a los valores correspondientes a lo largo de la discontinuidad AC, y por ende la razón de disipación de energía a lo largo del plano BC también la da la Ecuación N° 17. De la geometría de la Figura 3a, la longitud del plano de corrimiento es $L_{(BD)} = h/(2 \cos \zeta)$, el ángulo de inclinación $i_{(BD)}$ es igual a $\pi/2 - (\alpha - \psi)$, y según se muestra en la Figura 3b el aumento de la velocidad es

$$V_{(BD)} = \frac{V_f}{\tan \eta \cos \zeta}$$

De esta forma, a partir de las Ecuaciones N°1 y N° 3 se obtiene:

$$\delta W_{(BD)} = B \left(\frac{4d^2 + h^2}{16dh} \right) [(1+k) - (1-k)\cos 2(\zeta - \psi)] C_{uv} V_f \quad (18)$$

Debido a que la longitud, el aumento de la velocidad y la resistencia al corte a lo largo del plano de corrimiento DE son idénticos a aquellos que existen a lo largo de la discontinuidad BD, la razón de disipación de energía a lo largo de DE también se da por la Ecuación N° 18. A partir de la geometría de Figura 3a, la longitud del plano de corrimiento $L_{(CD)}$ es igual a $(b+2h)/4$, de la Figura 3b el aumento de velocidad $V_{(CD)} = 2 V_f / \tan \eta$; y la resistencia al corte no drenado $C_{ui(CD)}$ se obtienen a partir

de la Ecuación N° 3 con el ángulo de inclinación $i_{(CD)} = \pi/2 - \psi$, y, por ende, de la Ecuación N° 1, la disipación de energía interna a lo largo de la discontinuidad CD, después de simplificarse, queda como

$$\delta W_{(CD)} = B \left(\frac{B + 2h}{16d} \right) [(1+k) - (1-k)\cos 2\psi] C_{uv} V_f \quad (19)$$

Al sumar las tasas de disipación de energía a lo largo de las discontinuidades AC, BC, CD, BD, y DE, y al multiplicar por dos para ambos lados del mecanismo, dan como resultado las razones totales de disipación de energía interna. Al equiparar la razón total de disipación de energía interna que se obtiene de esta manera con la razón total, con la cual se realizó el trabajo gracias a la fuerzas en los cimientos (Ecuación N° 10), luego de realizar algunas manipulaciones algebraicas la carga límite se da por:

$$P^u = \frac{1}{4dh} \left[(1+k)(8d^2h + B^2h + 2Bh^2 + 4d^2B) + (1-k)(8d^2h - B^2h - 2Bh^2 + 4d^2B)\cos 2\psi \right] C_{uv} \quad (20)$$

La mejor cota superior en la Ecuación N° 20 se encuentra al minimizar P^u con respecto a las variables d y h, o

$$\frac{\partial P^u}{\partial d} = 0 \quad (21a)$$

y

$$\frac{\partial P^u}{\partial h} = 0 \quad (21b)$$

De las Ecuaciones 20, 21a y 21b, se obtiene que:

$$\frac{d}{B} = \frac{1}{2\sqrt{2} \left[\frac{(1+k) + 1-k \cos 2\psi}{(1+k) - (1-k) \cos 2\psi} \right]} \quad (22)$$

y

$$\frac{h}{B} = \frac{1}{2} \quad (23)$$

Se destaca de la Ecuación N° 23 que la longitud h es la función sólo del ancho de la zapata y por ende la extensión lateral del mecanismo de falla es independiente del grado de anisotropía del suelo. Al establecer que $k=1$, de la Ecuación N° 22, $d/B = 1/(2\sqrt{2})$ que es exactamente el valor obtenido por Chen (1975) para el caso de suelos con resistencia al corte isotrópica. Al substituir las Ecuaciones N° 22 y N° 23 dentro de la Ecuación N° 20, la cota superior mínima que se obtiene para el mecanismo traslacional de la Figura 3a se da por:

$$q^u = N_{ct}^a C_{uv} \quad (24)$$

En donde N_{ct}^a es el factor de capacidad de carga para una zapata escalonada en suelos isotrópicos cohesivos que se



obtiene en base al mecanismo traslacional que se describe en la Figura 3a, y se expresa como:

$$N_{cT}^a = 2\sqrt{2} \left[(1+k)^2 - (1-k)^2 \cos^2 2\psi \right]^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

La Ecuación N° 25 tiene la ventaja de que proporciona directamente, sin recurrir a gráficos suplementarios, una expresión para el factor de capacidad de carga para una zapata escalonada en la superficie del suelo cohesivo anisotrópico. Al establecer que $k = 1$ nos da $N_{cT}^a = 4\sqrt{2}$, que es exactamente el valor obtenido por Chen (1975) para el caso de suelos con resistencia al corte isotrópica no drenado.

3. Resultados y discusión

Los valores para los factores de capacidad de carga N_{cM}^a (Ecuación N° 15) y N_{cT}^a (Ecuación N° 25), para el grado de anisotropía que varía entre 0.5 a 2.0, se tabulan en las columnas N° 2 y N° 5, de la Tabla 1, respectivamente. Aun cuando, para efectos prácticos, se debe estimar el valor del factor de capacidad de carga con sólo un decimal, para efectos de comparación todos los resultados de la Tabla 1 están expresados con tres decimales.

Al revisar la información que parece en la Tabla N° 1 se ve que la anisotropía del suelo tiene un profundo efecto en el valor de factor de la capacidad de carga. Para el caso del mecanismo modificado del tipo Hill, la variación en el valor de N_{cM}^a fue de más menos 34%,

cuando k varió de 1.0 a 0.50. Al cambiar el valor de k de 1.0 a 2.0 el aumento en el valor de N_{cM}^a fue de más menos un 50%. Esto es casi la misma proporción de cambio que resulta cierta para los valores N_{cT}^a , para el caso del mecanismo traslacional (columna 5 de la Tabla 1). Por lo tanto, es evidente que omitir la anisotropía y suponer que la fuerza en todas las direcciones es igual a la fuerza vertical es muy inseguro desde el punto de vista de k menor que uno; y conservador para los valores de k mayores que uno. El grado de vulnerabilidad y el conservadurismo aumentan a medida que k se hace mucho menor y mucho mayor que uno, respectivamente.

La Figura 4 muestra la relación entre el grado de anisotropía del suelo y los factores de capacidad de carga N_{cM}^a y N_{cT}^a . Se destaca que, independiente del grado de anisotropía del suelo, los valores de N_{cM}^a son considerablemente menores que los de N_{cT}^a . Tal como se muestra en la Figura 5, la discrepancia entre las dos soluciones aumentó, a medida que el grado de anisotropía se incrementó, y llegó a su valor máximo de un 10% cuando el factor k se aproximó a la unidad, que representa el caso cuando la resistencia al corte es isotrópica, y luego nuevamente comenzó a descender. Sin embargo, al considerar las incertidumbres asociadas a las propiedades medidas en el suelo, la desviación entre los valores de N_{cM}^a y N_{cT}^a se encuentra dentro de los límites aceptables para efectos de aplicaciones prácticas.

Tabla 1. Valores para el factor de capacidad de carga de mecanismos de falla distintos

Grado de Anisotropía, k	N_{cM}^a		N_{cH}^a	N_{cT}^a
	Ángulo β de la Ecuación N° 13b	Ángulo β de la Ecuación N° 26		
0.5	3.842	3.842	3.856	4.209
0.6	4.105	4.105	4.113	4.506
0.8	4.626	4.626	4.627	5.087
1.0	5.142	5.142	5.142	5.657
1.2	5.655	5.656	5.656	6.219
1.4	6.166	6.166	6.170	6.775
1.6	6.675	6.675	6.684	7.326
1.8	7.184	7.184	7.198	7.874
2.0	7.693	7.693	7.712	8.419



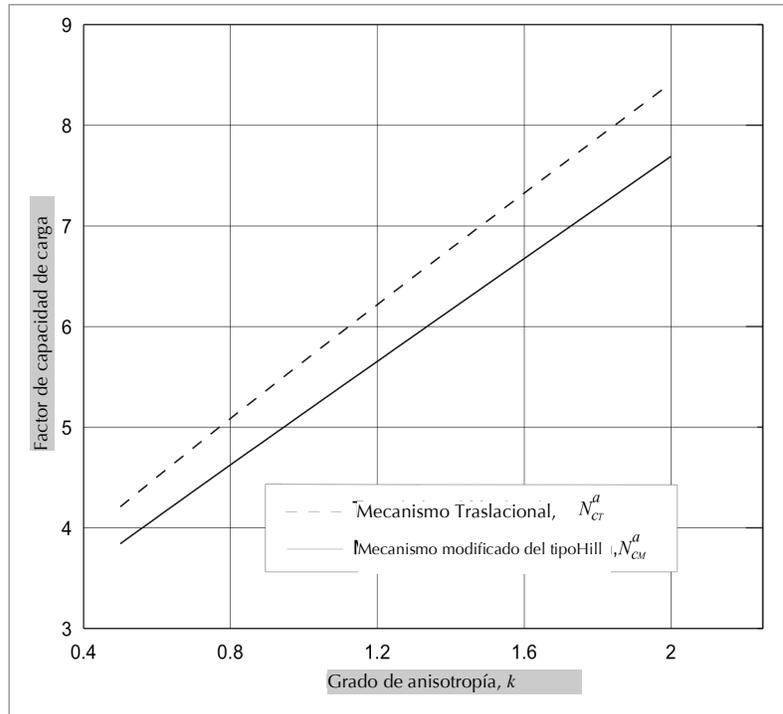


Figura 4. Comparación de factores anisotrópicos de la capacidad de carga de mecanismos de falla traslacional y modificado del tipo Hill

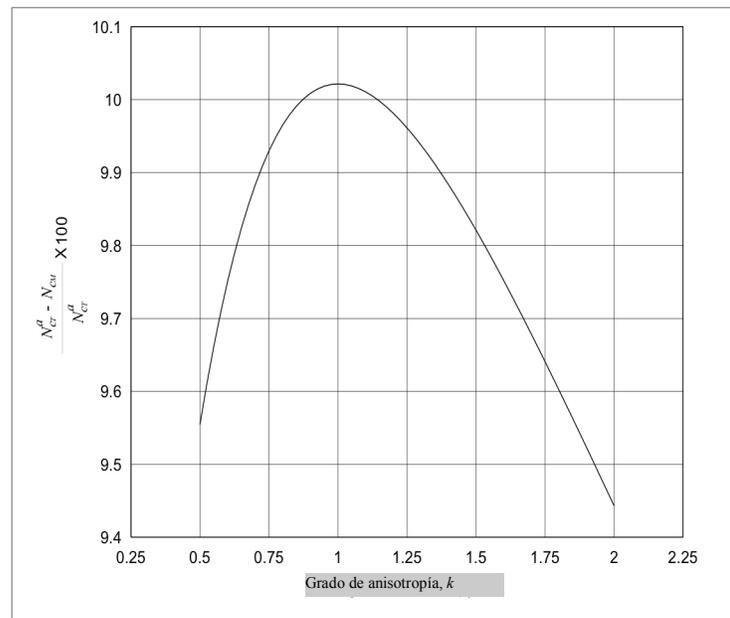


Figura 5. Discrepancia entre los factores de capacidad de carga N_{CT}^a y N_{CM}^a como una función del grado de anisotropía

En la Figura 6 y la Figura 7, se muestra la relación del grado de anisotropía k con cada uno de los ángulos β que se encuentran en la Ecuación N° 13b y la profundidad d que se obtiene a partir de la Ecuación N° 22, respectivamente. Se puede apreciar que mientras mayor sea el grado de anisotropía del suelo, mayores serán el ángulo β y la profundidad d , y por ende la cota inferior del mecanismo de fallas se extiende más profunda en la tierra. Esto se demuestra, de forma esquemática en la Figura N° 8 y Figura N° 9, para el mecanismo modificado del tipo Hill y el mecanismo traslacional, respectivamente. Sin embargo, el cambio en la intrusión descendente cuando el valor k aumentado era mayor para el mecanismo traslacional que para el mecanismo modificado del tipo Hill.

También se destaca en la Figura 6 que para k , con un rango que va desde los 0.5 hasta los 2, el ángulo β permanece en un rango angosto de unos $41^\circ - 48.2^\circ$. Los valores correspondientes para $\sin 2\beta$ aumentaron sólo desde 0.990 hasta 0.994, es decir un cambio de cerca del 0,4%. Entonces, $\sin 2\beta$ en la Ecuación N° 13b virtualmente se puede establecer como uno, y de aquí el ángulo β se expresa de forma explícita como:

$$\beta \cong \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{(1+k) - (1-k) \cos 2\psi}{(1-k) \cos 2\psi} \right] \tag{26}$$

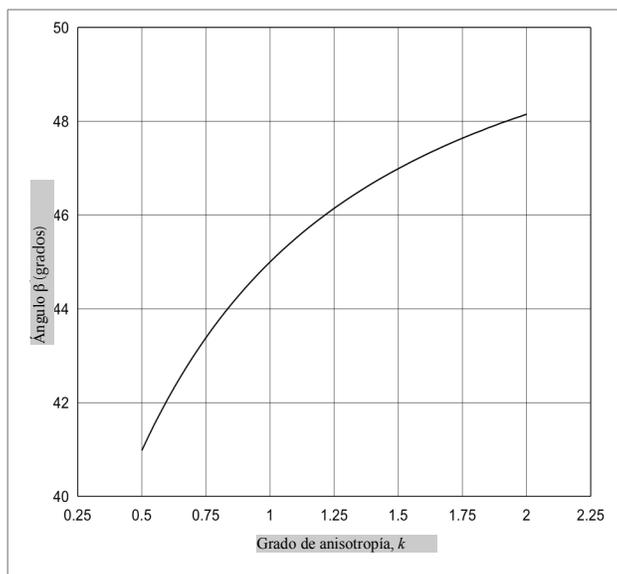


Figura 6. Relación entre el ángulo optimizado β que define el mecanismo de falla del tipo Hill modificado y el grado de anisotropía

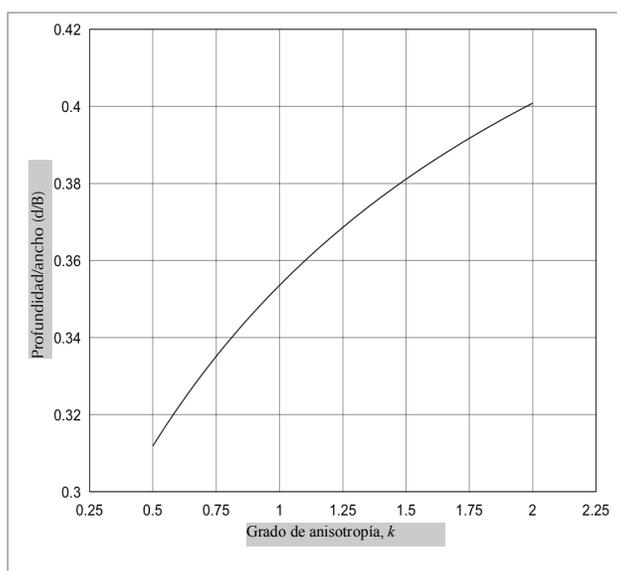


Figura 7. Relación entre la profundidad optimizada del mecanismo traslacional de falla y el grado de anisotropía



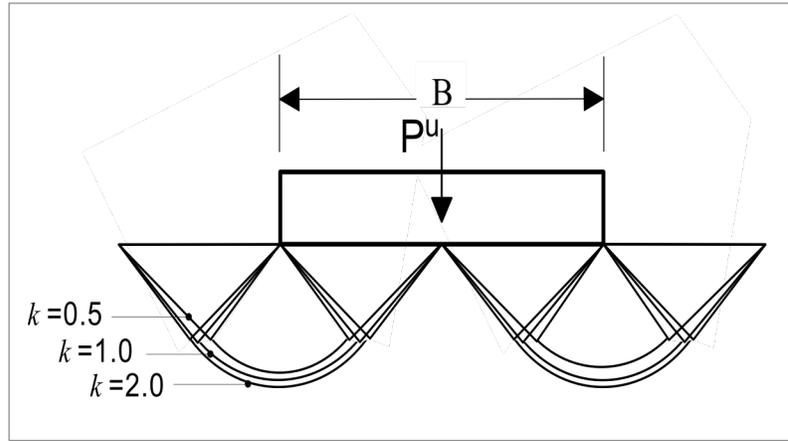


Figura 8. Variación de la intrusión descendente del mecanismo modificado del tipo Hill, con el grado de anisotropía

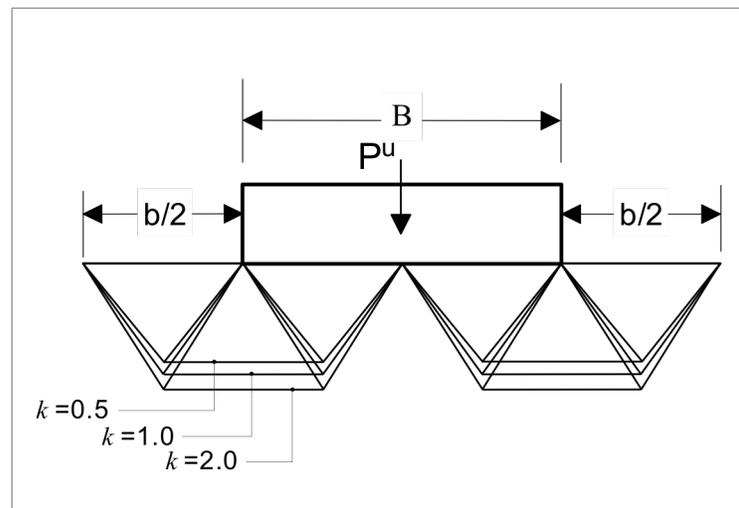


Figura 9. Variación de la intrusión descendente del mecanismo traslacional, con el grado de anisotropía

Los valores para N_{cM}^a tal cual se obtienen a partir de la Ecuación N° 15, con el ángulo β dado por la Ecuación N° 26 se muestran en la columna N° 3 de la Tabla 1. Se destaca que para todos los valores de grado de anisotropía considerados, los valores para N_{cM}^a que aparecen en las columnas 2 y 3 son idénticos, con una exactitud de tres decimales. Por lo tanto, se justifica el establecer que $\sin 2\beta$ en la Ecuación N° 13b es igual a uno, y el ángulo β se determina, de forma explícita, a partir de la Ecuación N° 26, sin necesidad de recurrir al ensayo y error que es necesario para el caso de la Ecuación N° 13b.

Los resultados de las pruebas entregados por Lo (1965) señalaban que el ángulo ψ es casi constante, independiente de la dirección en la cual se ha tomado la muestra; por lo tanto es independiente del ángulo de rotación de la tensión principal máxima. Más aún, los resultados de las pruebas no drenadas realizadas por Lo

(1965) y por Law y Lo (1976) indicaban que el ángulo ψ se sitúa entre los 30° y 40° con un promedio probable de unos 34°. Se evaluó el factor de capacidad de carga N_{cM}^a para el ángulo ψ que se encuentra entre 30° a 40° y para una serie de valores para k , que se encuentren entre 0.5 y 2.0, y la Figura 10 muestra la relación entre N_{cM}^a y ángulo ψ para $k = 0.5$. Se ve que el valor de ángulo ψ tiene un efecto insignificante en el valor del factor de capacidad de carga. Para todos los valores considerados de k , el ángulo ψ tenía un efecto sobre N_{cM}^a de no más de un 0.6%. Más aún, se demostró que el efecto se reducía a medida que el valor de k se aproxima a la unidad. Por ejemplo, para $k = 1.2$ el cambio en *change in* N_{cM}^a con el ángulo ψ que varía desde 30° hasta 40° era de solamente un 0.03%.



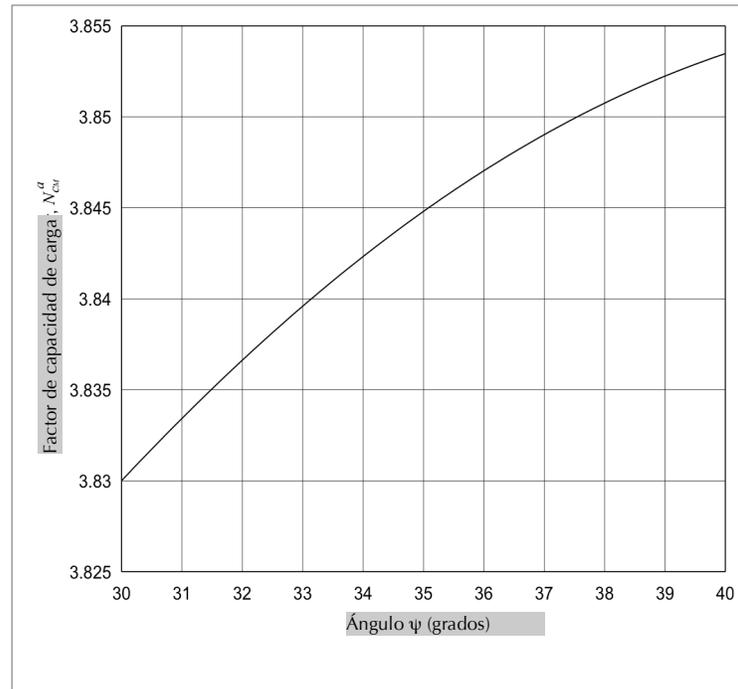


Figure 10. Relación entre el factor de capacidad de carga N_{CM}^a y ángulo ψ ($k = 0.5$)

De esta forma, al ángulo ψ prácticamente se le puede dar un valor fijo de 34° , que es, en realidad, el valor sugerido por Lo (1965), y las Ecuaciones N° 15 y N° 26, respectivamente se vuelven:

$$N_{CM}^a \cong (1+k)(\cot \beta + 2\beta) - \frac{3}{8}(1-k)\cot \beta \cos 2\beta \quad (27)$$

y

$$\beta \cong \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{5+11k}{3(1-k)} \right] \quad (28)$$

Al establecer que los ángulos α y β de la Figura 1a son iguales a $\pi/4$, el mecanismo de falla se convierte en el mecanismo de tipo Hill convencional, y el factor de capacidad de carga expresado en la Ecuación N° 15 se convierte en:

$$N_{CH}^a = \frac{(1+k)(2+\pi)}{2} \quad (29)$$

en donde N_{CH}^a es el factor anisotrópico de la capacidad de carga que se obtiene, basándose en el mecanismo de falla del tipo Hill convencional. Para fuerza isotrópica, $C_{uh} = C_{uv} = C_w$, por ende $k = 1$ y la Ecuación N° 29 se reduce a $N_c = (2+\pi)$, que es el valor Prandtl-Reissner conocido para el factor de capacidad de carga de zapatas en suelos isotrópicos cohesivos.

Estableciendo que $k = 1$, la Ecuación N° 11 se reduce a:

$$P^u = \beta [\cot \beta + \cot \alpha + 2(\alpha + \beta)] C_u \quad (30)$$

Al minimizar la Ecuación N° 30 con respecto a β nos da que:

$$\sin^2 \beta - \cos^2 \beta = 0 \quad (31)$$

De la Ecuación N° 31, $\beta = \pi/4$ y al minimizar, de forma similar, la Ecuación N° 30 con respecto a α , el ángulo α también puede ser igual a $\pi/4$.

Por lo tanto, aquí se muestra que la menor capacidad de carga de zapatas en los suelos isotrópicos que se obtienen a partir del mecanismo modificado del tipo Hill (Figura 1a) se produce cuando los ángulos α y β de la Figura 1a son los dos iguales a $\pi/4$ (es decir, el mecanismo convencional del tipo Hill). Por cierto, se sabe que una buena cota superior para la carga límite real se obtiene al considerar un mecanismo de colapso en donde los parámetros geométricos son variables. A medida que se elimina el proceso de optimización de la geometría del mecanismo de falla, la sobreestimación de la carga límite real es esperable. Sin embargo, los resultados de la Tabla 1 muestran que la discrepancia entre los valores de N_{CM}^a y

N_{CH}^a es mínima, si no insignificante, en especial para los valores más bajos de k . Sin duda, al comparar los datos de las columnas N° 2 y N° 4 de la Tabla N°1 se ve que, ya sea que el ángulo β varíe un esquema de optimización o quede establecido con anterioridad con un valor fijo de $\pi/4$, la discrepancia en el valor del factor de capacidad de carga no excede el 0.4%. De esta forma la mejora en P^u no garantiza el hallazgo del ángulo β a partir de la Ecuación N° 26. En vez de eso se puede establecer igual a $\pi/4$, basándose no sólo en la premisa de que este valor para β



nos da la cota superior mínima para el caso de fuerza isotrópica, pero también luego de considerar la casi infinitesimal diferencia entre los valores del factor de capacidad de carga que aparecen en las columnas N°2 y N°4 de la Tabla 1.

3.1 Estudio comparado

Independiente del grado de anisotropía del suelo, la Ecuación N° 29 entrega valores de cota superior que son menores que los valores correspondientes, que se obtienen a partir del mecanismo traslacional (es decir, la Ecuación N° 25) y sólo son ligeramente mayores que los valores que nos entrega la solución exacta (es decir, la Ecuación N° 15), y por ende esta fórmula se utiliza, de forma exclusiva, en las discusiones subsecuentes.

En la Tabla N° 2 se muestra una comparación del factor de capacidad de carga N_{CH}^a con lo que podríamos llamar las soluciones más conocidas de capacidad de carga para arcillas anisotrópicas. Debido a que la solución de Reddy y Rao (1981) sólo se encuentra disponible de manera gráfica, los mismos valores para el grado de anisotropía que ellos consideraron, ahora se consideran para la generación de los valores del factor de capacidad de carga que se muestran en la Tabla 2. El grado de anisotropía se define como la razón de la resistencia al corte principal de forma vertical a la horizontal y como tal es recíproca según la definición adoptada en este paper. De esta forma, los valores de k que aparecen en la Tabla N° 2 son recíprocos con respecto a los valores considerados por Reddy y Srinivasan (1967) y Reddy y Rao (1981).

La solución entregada por Reddy y Srinivasan (1967) se obtuvo con el método de equilibrio de límites suponiendo un mecanismo de falla rotacional. Se puede apreciar en la Tabla N° 2 que, independiente del grado de anisotropía del suelo, la solución planteada por Reddy y Srinivasan (1967) entregó valores más altos para el factor de capacidad de carga, si se compara con los resultados

del análisis presentado. La diferencia entre los dos rangos de soluciones va desde un 3% hasta un 9%, para $k = 0.5$ y $k = 1.25$, respectivamente. Esto es lo esperado a la luz del hecho de se sabe que el mecanismo rotacional no proporciona la cota superior mínima para el problema de la capacidad de carga. Por lo tanto, la discrepancia entre la solución presentada y la de Reddy y Srinivasan (1967) se atribuye no al método de análisis, sino más bien a los distintos mecanismos de falla postulados. De hecho, tal como quedó establecido al inicio de este paper, Chen (1975) resolvió el mismo problema utilizando el enfoque cinemático de análisis de límites y los resultados que concuerdan con la solución a través del método de equilibrio de límites proporcionada por Reddy y Srinivasan (1967).

Reddy y Rao (1981) utilizaron el enfoque cinemático del análisis de límites y adoptaron el mecanismo de falla del tipo Prandtl. Se puede apreciar en la Tabla 2 que, para un grado de anisotropía menor a uno, la solución presentada "sobrepredice" la solución proporcionada por Reddy y Rao (1981), con la desviación que era de 21% para $k = 0.5$ y que se reduce de forma consistente hasta llegar a unos 4.5% para $k = 0,833$. Sin embargo, a medida que el valor de k es mayor que uno, se ve que el análisis presentado nos entrega un valor menor para el factor de capacidad de carga. Aun cuando no había resultados disponibles para un valor de k mayor a 1,25, la "sobrepredicción" de la solución proporcionada por Reddy y Rao (1981) se espera que aumente de forma consistente cuando el valor de k sea mayor. Además, aun cuando la solución de Reddy y Rao (1981) entregó valores más bajos para el factor de capacidad de carga, en los casos cuando k es menor que uno, aún así la pequeña mejora queda compensada por la complejidad del procedimiento de optimización que se necesita para lograr la cota superior mínima, en comparación con la expresión simple de N_{CH}^a que proporciona la Ecuación N° 29.

Tabla 2. Comparación de los valores del factor de capacidad de carga a partir de un método de análisis distinto

Referencia	Método de Análisis	Grado de Anisotropía, k						
		0,500	0,556	0,625	0,714	0,833	1,000	1,250
Análisis actual (ecuación N° 29)	Análisis de límites	3,856	3,999	4,178	4,407	4,713	5,142	5,784
Reddy y Srinivasan (1967)	Equilibrio de límites	3,964	4,139	4,357	4,636	5,005	5,520	6,288
Reddy y Rao (1981)	Análisis de límites	3,179	3,445	3,718	4,035	4,509	5,142	6,071
Davis y Christian (1971)	Línea de corrimiento	3,913	4,053	4,211	4,430	4,718	5,142	5,796



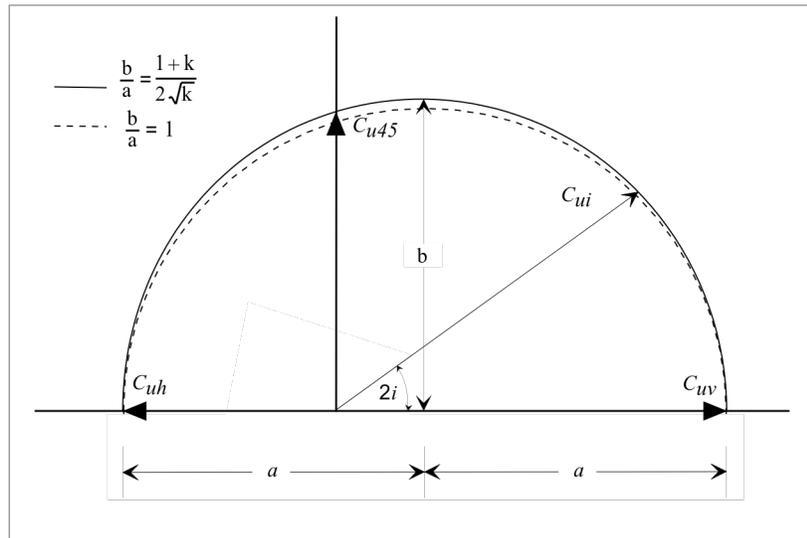


Figura 11. Variación elíptica de resistencia al corte no drenado . (En honor a Davis y Christian, 1971)

Al utilizar el método de la línea de corrimiento, Davis y Christian (1971) presentaron una solución para la capacidad de carga no drenada en arcillas anisotrópicas. Se supone que la fuerza anisotrópica varía en la forma de una elipse en donde, tal como se muestra en la Figura N°11, la resistencia al corte que se mide en un ángulo i desde la vertical se grafica a lo largo de una línea radial desde el $2i$ orientado a su origen desde el eje horizontal. La solución característica de las ecuaciones proporcionadas por (Davis y Christian 1971):

$$N_{cd}^a = N_c' \left(\frac{1+k}{2} \right) \quad (32)$$

en donde N_{cd}^a representa el factor anisotrópico de capacidad de carga de Davis y Christian (1971), en donde N_c' es un factor que constituye una integrales de función elíptica del segundo tipo y su valor fue proporcionado de forma gráfica, como una función de la razón b/a . Según la geometría de elipses, el valor de b/a es igual a $C_{u45}' / \sqrt{C_{uh}' C_{uv}'}$, en donde C_{u45}' es el valor de resistencia al corte, en un ángulo de 45° a la vertical. Para el caso especial, cuando $b = a$, N_c' en la Ecuación N° 32 reduce a la convencional $2+\pi$, y por ende el factor N_{cd}^a se vuelve del todo idéntico al factor N_{ch}^a que se muestra en la ecuación N° 29.

Es evidente de que, a diferencia de todas las otras soluciones en las cuales la capacidad de carga para suelos anisotrópicos se define en relación a la resistencia al corte

vertical y horizontal; sin embargo, en la solución que entregan Davis y Christian (1971) se necesita de un tercer valor en la dirección de 45° . Los datos experimentales proporcionados por Davis y Christian (1971) señalaban que siete de cada diez datos de pruebas informados por diversos autores, la discrepancia entre los valores de C_{u45}' medidos de forma experimental y aquellos predichos a partir de la Ecuación N° 3 iban desde 2 hasta un 10% más menos. Por lo tanto, el uso de la Ecuación N° 3 para la evaluación de C_{u45}' , se considera justificable. Más aún, los resultados presentados por Davis y Christian (1971) demostraron que el valor de la capacidad de carga predicho no es tan sensible al valor de C_{u45}' , como lo es a las diferencias entre C_{uh}' y C_{uv}' .

En este paper y en la información que recabamos de varios otros investigadores, se supone que la Ecuación N° 3 nos muestra una representación válida de la resistencia al corte, en cualquier dirección. A partir de la Ecuación N° 3, C_{u45}' es igual a $(1+k)C_{uv}'/2$, y en consecuencia la razón b/a es igual a $(1+k)/(2\sqrt{k})$. Según esta razón los valores del factor N_c' en la Ecuación N° 32 se determinaban a partir del gráfico $k-N_c'$ de Davis y Christian (1971). El valor que se obtiene para N_c' luego se incluyo en la Ecuación N° 32 para obtener los valores N_{cd}^a que aparecen en la cuarta fila de la Tabla 2. Se destaca que los valores de N_{ch}^a y N_{cd}^a concuerda bien. La discrepancia aumentó, ya que el valor de k se desvía de la unidad; sin embargo las dos soluciones difieren en no más de un 1.5% para el rango de valores considerado en la razón k .



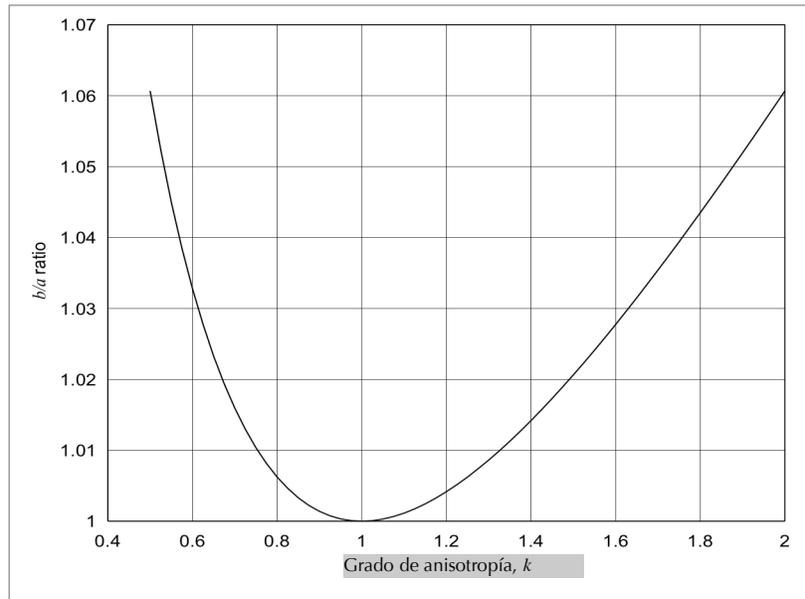


Figura 12. Razón b/a versus el grado de anisotropía con la distribución de fuerza que se ve representada en la fórmula de Casagrande y Carillo.

Mientras se suponga que el locus de fuerza queda representado en la Ecuación N° 3, el cambio en la razón b/a con k es considerado pequeño, tal como se muestra en la Figura 12. El cambio correspondiente en el valor de N'_c con respecto a la razón b/a , y por ende k , se considera un valor mínimo. Por ejemplo, para un valor de 1 y 2 para la razón k , los valores correspondientes para el factor N'_c son 5.14 y 4.95, respectivamente. De esta forma un cambio de un 100% en el valor de k dio como resultado un cambio sólo de un 3.7% en el valor de N'_c . Por lo tanto, se puede suponer que el factor N'_c es independiente de k y por ende constituye un valor fijo de $2+\pi$. En consecuencia, el factor de capacidad de carga N_{cd}^a que se obtiene a partir de la solución que surge gracias al método de línea de corrimiento, el cual se muestra en la Ecuación N° 32 se vuelve exactamente idéntico al factor N_{ch}^a que se muestra en la Ecuación N° 29 que se derivó, según el enfoque de la cota superior.

En realidad, Davis y Christian (1971) sugirieron que en ausencia del valor C_{u4} , el factor N'_c en la Ecuación N° 32 tiene que ser reemplazado por $\chi(2+\pi)$, en donde χ es un factor de corrección. Los datos experimentales recolectados por Davis y Christian (1971) indican que el valor de los rangos χ van entre 0.89 a 1.03, el valor promedio es de 0.97. Ellos sugieren que el uso de $\chi = 0.9$ y, en consecuencia, para un grado de anisotropía dado el valor de N_{cd}^a es 10% menos que el valor correspondiente de N_{ch}^a . Esto se justifica si recordamos que N_{ch}^a es, de hecho, una solución de cota superior.

Por lo tanto, es interesante notar que la solución de cota superior derivada en este paper, para el caso del mecanismo convencional del tipo Hill de falla y para la solución a través del método de la línea de corrimiento presentado por Davis y Christians (1971) se convierten en

expresiones idénticas para el factor anisotrópico de capacidad de carga, siempre y cuando en la solución de Davis y Christian (1971), ya sea que la variación angular de resistencia al corte quede definida, tal como aparece en la Figura N° 11 pero la razón b/a quede igual a 1, o de forma alternativa la relación de Casagrande y Carillo (1944) (es decir, la Ecuación N° 3) se considera válida y la dependencia de la razón b/a en el valor de k se considera como insignificante. Ya sea que la razón b/a quede igual a uno o que de evaluada como $(1+k)/(2\sqrt{k})$, el locus de la distribución de fuerzas para ambos casos se puede comparar de forma razonable, tal como se muestra en la Figura 11(1971).

4. Resumen y conclusiones

Al utilizar el enfoque cinemático del método de análisis de límites, este paper presenta soluciones de forma cerrada para la capacidad de carga no drenada de zapatas escalonadas someras en arcillas anisotrópicas. Las soluciones se obtuvieron al utilizar los mecanismos de falla traslacional y el modelo tipo Hill modificado, con ángulos de incidencia variables. Las expresiones derivadas hacen posible calcular, de forma analítica y directa, la capacidad de carga de arcillas anisotrópicas, en comparación con otras soluciones posibles en las cuales los resultados se presentan, principalmente, con gráficos y con tablas para los valores discretos de suelo y los parámetros de mecanismos de falla. Se realizó una investigación con el objetivo de analizar la influencia del grado de anisotropía del suelo en el valor del factor de capacidad de carga para los mecanismos probados, y también una comparación con los resultados pertinentes de otras investigaciones.

Aun cuando el uso del mecanismo modificado del tipo Hill nos entrega una expresión analítica para el factor de capacidad de carga N_{cm}^a (Ecuación N° 15), sin embargo,

el ángulo β que define el mecanismo debe ser descubierto por medio de ensayo y error (Ecuación N° 13b). Sin embargo, se descubrió que para una gran variedad de anisotropía, el rango correspondiente para los posibles valores del ángulo β es muy angosto. De esta manera, el ángulo β se puede determinar, de forma conveniente, a partir de la expresión analítica aproximada que aparece en la Ecuación N° 26, sin recurrir al ensayo y error que se requiere para la solución exacta que se muestra en la Ecuación N° 13b.

Los resultados del estudio paramétrico también ha demostrado que para un grado dado de anisotropía del suelo, ya sea que el ángulo β varíe en un esquema optimizado o se dé valor fijo de $\pi/4$, los valores correspondientes para el factor de capacidad de carga son muy comparables. De este manera la mejora en la cota superior predicha para N_{cm}^a no garantiza el uso del mecanismo modificado del tipo Hill, con ángulo variable de incidencia. En vez de eso, el mecanismo convencional de falla del tipo Hill con $\beta = \pi/4$ puede entregarnos, de forma razonable, no sólo una solución analítica (es decir, la Ecuación N° 29) sino que también una expresión para el factor de capacidad de carga, N_{ch}^a que sea explícito, conciso y simple de utilizar en aplicaciones prácticas. Además, aun cuando la desviación entre los valores de cota superior que se obtienen a partir de los dos mecanismos se considere que esté dentro de los límites aceptables para las aplicaciones prácticas, aún así el mecanismo convencional del tipo Hill sin optimización de los parámetros geométricos nos entrega valores de N_{ch}^a que son menores que los valores optimizados N_{cr}^a asociados al mecanismo traslacional de falla.

Fue interesante descubrir que N_{ch}^a es exactamente igual al factor de capacidad de carga convencional de Prandtl-Reissner para el caso de suelos isotrópicos (es decir, $2+\pi$) multiplicado por el promedio de la suma del grado de anisotropía más la unidad. Es decir, la capacidad de carga de zapatas en arcillas anisotrópicas se obtiene, simplemente, a partir del análisis convencional con el valor de la resistencia al corte isotrópica que se reemplaza por el valor promedio de la resistencia al corte en dirección vertical y horizontal.

Suponiendo que la variación de la resistencia al corte con dirección se ve representada, de manera justificable, en la fórmula de Casagrande y Carillo (Ecuación N° 3), los valores de cota superior para el factor de capacidad de carga que se obtiene del mecanismo modificado del tipo Hill (Ecuación N° 15) resultaron ser idénticos a los valores que se obtuvieron de la solución a través del método de línea de corrimiento de Davis y Christian (Ecuación N° 32). La discrepancia entre las dos soluciones aumentó, a medida que el grado de anisotropía se desvía de la unidad, sin embargo las dos soluciones difieren en no más de 1.5% para los valores de grado de anisotropía, k , cuyo rango va entre 0.5 y 2.0. Más aún se descubrió que la solución de la cota superior a la cual se llegó en este paper, para el caso del mecanismo convencional de falla del tipo Hill (Ecuación N° 29) y la solución a través del método de línea de corrimiento que fue presentada por Davis y Christian nos muestra un factor

idéntico de capacidad de cargas, siempre y cuando la solución a través del método de la línea de corrimiento la distribución elíptica de resistencia al corte que se muestra en la Figura 11 se aproxime por medio de una distribución circular (es decir, $b = a$), o de forma alternativa que se represente por medio de la distribución Casagrande y Carillo pero la dependencia de la razón b/a en el valor de grado de anisotropía se supone que es insignificante.

5. Nomenclatura

B :	Ancho de las fundaciones
C_{uh} :	Resistencia al corte no drenado correspondiente a dirección horizontal en la superficie
C_{ui} :	Resistencia al corte no drenado en inclinación i de la tensión principal máxima con la vertical
C_{un} :	Resistencia al corte no drenado, a lo largo del plano de falla n
C_{uv} :	Resistencia al corte no drenado, correspondiente a la dirección vertical a la superficie
C_{u45} :	Resistencia al corte no drenado, en un ángulo de 45 a la vertical
d :	Extensión descendente del mecanismo de falla
h :	Extensión lateral del mecanismo de falla
I :	Inclinación de la tensión principal máxima con dirección vertical
K :	Coficiente de anisotropía
l_n :	Longitudde plano de falla n
n :	Número entero
N_{cd}^a :	Factor anisotrópico de capacidad de carga de Davis y Christian
N_{ch}^a :	Factor anisotrópico de capacidad de carga asociado al mecanismo de falla del tipo Hill convencional.
N_{cm}^a :	Factor anisotrópico de capacidad de carga asociado a mecanismo de falla del tipo Hill modificado.
N_{cr}^a :	Factor anisotrópico de capacidad de carga asociado al mecanismo de falla traslacional.
N_c^f :	Un factor en el Factor anisotrópico de capacidad de carga de Davis y Christian
q^f :	Capacidad de carga final
P^f :	Carga final
R :	Radio de abanico de deslizamiento en el mecanismo de falla del tipo Hill modificado
V_f :	Desplazamiento del cimientto
V_n :	Desplazamiento a lo largo del plano de falla n
α, β :	Parámetros geométricos para el mecanismo de falla del tipo Hill modificado
ξ, η :	Parámetros geométricos para el mecanismo traslacional de falla
δE :	Razón de trabajo externo
δW :	Razón de disipación de energía interna
δW_n :	Razón de disipación de energía interna a lo largo del plano de falla n
θ :	Parámetro geométrico
ψ :	Ángulo entre tensión principal máxima y plano de falla



6. Referencias

- Bishop A., W. (1966)**, The strength of soils as engineering materials", *Geotechnique*. 16(1), 85-128.
- Casagrande A. and Carillo N. (1944)**, Shear failure of anisotropic materials. *Contribution to Soil Mech.*, Boston Soc. of Civ. Engineers. 122-135.
- Chen W., F. (1975)**, *Limit Analysis and Soil Plasticity*. Elsevier, Amsterdam.
- Chen W., F. and Davidson H., L. (1973)**, Bearing capacity determination by limit analysis. *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*. 99(6), 433-449.
- Chen W., F. and Giger M., W. (1971)**, Limit analysis of stability of slopes. *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*. 97(SM1), 19-26.
- Chen W., F. and Rosenfarb J., L. (1973)**, Limit analysis solutions of earth pressure problems. *Soils and Foundations*. 13(4), 45-60.
- Davis E., H. and Christian J., T. (1971)**, Bearing capacity of anisotropic cohesive soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*. 97(SM5), 753-769.
- Drescher A. (1983)**, Limit plasticity approach to piping in bins. *Journal of Applied Mechanics*. 50, 549-553.
- Drucker D., C. (1991)**, Constitutive relations for solids retrospect and prospect. In the proceedings of 3rd Int. Conf. on Constitutive laws for Engineering Materials, Tucson, Arizona. 199, 3-12.
- Drucker D., C., Greenberg H., J. and Prager W. (1952)**, Extended limit design theorems for continuous media. *Quarterly Journal of Applied Mathematics*. 9, 381-389.
- Florkiewicz A. (1989)**, Upper bound to bearing capacity of layered soils. *Canadian Geotechnical Journal*. 26(4), 730-736.
- Izbicki R., J. (1981)**, Limit plasticity approach to slope stability problems. *Journal of Geotechnical Engineering*. 107(2), 228-233.
- Kumar J. and Khatri V., N. (2011)**, Bearing capacity factors of circular foundations for a general $c - \phi$ soil using lower bound finite elements limit analysis. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 35(3), 393-405.
- Kumar J. and Kouzer K. (2007)**, Effect of Footing Roughness on Bearing Capacity Factor N_q . *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 133(5), 502-511.
- Kumar J. and Kouzer K. (2008a)**, Bearing Capacity of Two Interfering Footings. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 32, 251-264.
- Kumar J. and Kouzer K. (2008b)**, Vertical Uplift Capacity of Horizontal Anchors using Upper Bound Limit Analyses and Finite Elements. *Canadian Geotechnical Journal*. 45, 698-704.
- Law K., T. and Lo K., Y. (1976)**, Analysis of shear-induced anisotropy in Leda-Clay. In the Proceedings of Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Blacksburg, VA. 329-344.
- Lee K., M. and Rowe R., K. (1989)**, Effects of undrained strength anisotropy on surface subsidences induced by the construction of shallow tunnels. *Canadian Geotechnical Journal*. 26, 279-291.
- Livneh M. and Komornik A. (1967)**, Anisotropic strength of compacted clays. In the proceedings of 3rd Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. 298-304.
- Lo K. Y. (1965)**, Stability of slopes in anisotropic soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*. 31(SM4), 85-106.
- Menzies B. K. (1976)**, An approximate correction for the influence of strength anisotropy on conventional vane shear measurements used to predict field bearing capacity. *Geotechnique*. 26, 631-634.
- Michalowski R. L. (1997)**, An estimate of the influence of soil weight on bearing capacity using limit analysis. *Soils and Foundations*. 37(4), 57-64.
- Reddy A. S. and Rao K., N. V. (1981)**, Bearing capacity of strip footing on anisotropic and nonhomogeneous clays. *Soils and Foundations*. 21(1), 1-6.
- Reddy A. S. and Srinivasan R. J. (1967)**, Bearing capacity of footings on layered soils. *J of the Soil Mechanics and Foundation Division*. 93(SM2), 83-99.
- Sloan S.W. (1988)**, Lower bound limit analysis using finite elements and liner programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 12, 61-77.
- Su S. F., Liao H. J. and Lin Y. H. (1998)**, Base stability in anisotropic soft clay. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 124, 809-819.
- Ukritchon B. B., Whittle A. and Sloan S.W. (1998)**, Undrained limit analyses for combined loading of strip footings on clay. *Journal of Geotechnical Engineering*. 124(3), 265-276.
- Ward H.W., Marsland A. and Samuels S.G. (1965)**, Properties of the London clay at the Ashford Common Shaft: In-situ and undrained strength tests. *Geotechnique*. 15(4), 321-349.

